R. BOURDON C. BOURQUARD

PROBLÈMES DE PHYSIQUE

TERMINALES C - D - E

Sciences physiques

DELAGRAVE

R. BOURDON C. BOURQUARD
Professeurs agrégés au lycée M. Roby de Saint-Germain-en-Laye

PROBLÈMES DE PHYSIQUE

❋

Terminale C.D.E.

❋

LIBRAIRIE DELAGRAVE
15 rue Soufflot 75005 Paris

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal.

© LIBRAIRIE DELAGRAVE 1971

ISBN 2-206-00053-9

UTILISATION DE L'OUVRAGE

▶ **Ce recueil comprend :**

- Des fiches de problèmes notées Pb_n, dont la résolution est guidée. Tous ces problèmes sont résolus.
- Des fiches de problèmes non résolus, notées Contrôles.
- Quelques problèmes - expérience proposant l'exploitation de mesures expérimentales.
- Une liste d'exposés.

▶ **Les couleurs du liséré.**

- La bande du liséré située en **bordure** de fiche concerne les élèves de C et E; l'autre bande, située vers **l'intérieur** de la fiche, concerne les élèves de D.
- Le rose indique les différents types d'exercice que tous les élèves doivent être en mesure de résoudre. Ils devront être refaits au cours des révisions.
- Le gris correspond à d'autres exercices de type voisin des précédents.
- Les zones rayées grises et blanches proposent des exercices de niveau plus élevé destinés aux bons élèves.
- Le blanc indique que l'exercice n'est pas destiné aux élèves concernés par cette partie du liséré.

▶ **Quelques remarques sur l'utilisation des fiches :**

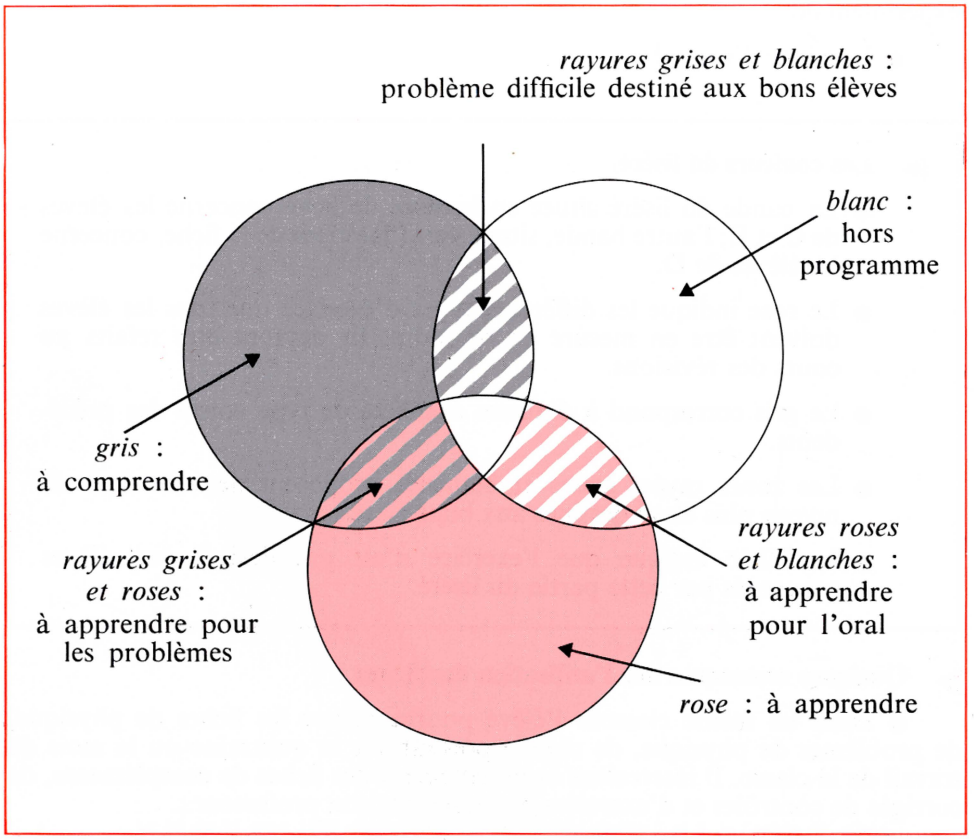
- Dans un même classeur l'élève pourra mettre les fiches de physique, de problèmes de physique, de chimie portant sur la quinzaine ou le mois de travail de la classe. Il intercalera éventuellement des fiches de compléments, de corrigés de contrôles et d'exercices proposés par son professeur...

- Après avoir étudié soigneusement la leçon P_n, l'élève aborde les exercices de la fiche Pb_n. L'élève lit les conseils généraux, étudie ensuite le premier ENONCE en cachant avec une feuille de papier les rubriques suivantes. L'élève doit *s'imposer une durée de recherche suffisante*. Il s'agit essentiellement pour lui de résoudre un problème et non pas de comprendre un corrigé. En cas d'échec, il démasquera le moins possible la rubrique suivante CONSEIL ou CORRIGE, en s'efforçant de résoudre la question avec le minimum d'indications.

● Si la recherche se fait en classe, il est évident que chaque élève doit progresser à son rythme propre. Il est anormal de ralentir les bons élèves et de précipiter les moins bons. Le professeur pourra aider alors tel élève ou tel groupe d'élèves à franchir une difficulté.

● Les élèves qui ont dû, pour résoudre et bien comprendre un problème, s'aider du corrigé ou demander des explications à leur professeur auront grand intérêt à refaire ce problème quelques jours après.

En résumé pour l'ensemble des fiches de Terminale (Physique, Chimie et Problèmes) les couleurs ont la signification suivante :



Calcul de petites variations

■ Conseils généraux

— Lorsque dans un même exercice interviennent des petites variations et des incertitudes, on notera δ... les variations, Δ... les incertitudes;

— Les élèves qui ont des difficultés pourront, au début, marquer d'une autre couleur les termes ne subissant pas de variation.

---

n° 1 *a, b, c,* subissent des variations Δa, Δb, Δc, en déduire les variations absolue ou relative de X et Y :

ÉNONCÉ

$$X = 5(2a - 3{,}1b + \pi)\,; \qquad Y = \pi\sqrt{\frac{a}{c}} \cdot b^2$$

CONSEIL

Ramener X à une somme algébrique; Y à un monôme, en remarquant que $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

CORRIGÉ

• $X = 10a - 15{,}5\,b + 5\pi$, *seuls* a *et* b *varient de* Δa *et* Δb, *d'où :*

$$\Delta X = 10\Delta a - 15{,}5\Delta b$$

$Y = \pi \cdot a^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{2}} b^2$; *seuls* a, b, c, *varient d'où :*

$$\frac{\Delta Y}{Y} \simeq \frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a} - \frac{1}{2}\frac{\Delta c}{c} + 2\frac{\Delta b}{b}$$

---

n° 2 La température d'une tige cylindrique, métallique, passe de 35 °C à 25 °C. Le coefficient de dilatation du métal est $\lambda = 10^{-5}\ °C^{-1}$

ÉNONCÉ

❶ Quelle est la variation relative de longueur?

CONSEIL

Soit l la longueur à θ °C : $l = l_0(1 + \lambda\theta)$, l_0 étant la longueur à 0 °C. Ramener cette formule à une somme en θ; en déduire Δl, puis $\frac{\Delta l}{l_0} : \frac{\Delta l}{l_0}$ est-il voisin de $\frac{\Delta l}{l}$?

• $l = l_0 + l_0\lambda\theta$, *seul* θ *varie de* $\Delta\theta$ *entraînant une variation* Δl *de* l :

$\Delta l = l_0\lambda\Delta\theta \Longrightarrow \frac{\Delta l}{l_0} = \lambda\Delta\theta$ $\frac{\Delta l}{l_0}$ *est faible devant* 1, *on ne change pratiquement pas le rapport en remplaçant* l_0 *par* l *longueur à* 35 °C. *On peut même, s'il fallait évaluer* Δl *prendre pour* l *une valeur approchée simple. D'où :*

CORRIGÉ

$$\boxed{\frac{\Delta l}{l} \simeq \lambda\Delta\theta}$$

• $\Delta\theta = 25\ °C - 35\ °C = -10\ °C$ *d'où* $\frac{\Delta l}{l} \simeq 10^{-5} \times (-10) = -10^{-4}$. *N'oublions pas que c'est un nombre abstrait, le signe — signifie que la longueur a diminué.*

❷ Quelle est la variation relative de son volume?

ÉNONCÉ

Exprimer le volume en fonction de l et du rayon r et faire le calcul de variation en remarquant quel est le « type » de la formule : somme ou monôme? Les variations relatives de r et de l sont-elles égales?

CONSEIL

CORRIGÉ

$V = \pi r^2 l$: *c'est un monôme d'où* $\dfrac{\Delta V}{V} = 2\dfrac{\Delta r}{r} + \dfrac{\Delta l}{l}$. *Même si la tige est partiellement évidée, nous savons qu'elle se dilate comme si elle était pleine, les variations relatives de longueur sont toutes égales à* $\lambda\Delta\theta$, *quelle que soit l'orientation du segment mesuré (parallèlement, perpendiculairement à l'axe de la tige...), et quelle que soit la longueur initiale : d'où* $\dfrac{\Delta V}{V} \simeq 2\lambda\Delta\theta + \lambda\Delta\theta \simeq 3\lambda\Delta\theta$.

On retrouve ainsi que le coefficient de dilation cubique est voisin de 3λ.

ÉNONCÉ

n° 3 L'intensité de la pesanteur g est donnée par $g = g_0 \dfrac{R^2}{(R+z)^2}$, R rayon terrestre, z altitude au-dessus de la Terre supposée sphérique. L'altitude augmente de 100 m, quelle est la variation relative de g? On donne $R = 6\,400$ km et on supposera l'altitude de départ z faible devant R.

CONSEIL

Seul z varie de Δz. Poser $R + z = u$, remarquer que $\Delta u = \Delta z$, en déduire $\dfrac{\Delta g}{g}$.

CORRIGÉ

- $g = g_0 R^2 u^{-2}$ *d'où* $\dfrac{\Delta g}{g} \simeq -\dfrac{2\Delta u}{u}$; *comme* $u = R + z$; R *ne variant pas*; $\Delta u = \Delta z$ *d'où* $\dfrac{\Delta g}{g} \simeq -\dfrac{2\Delta z}{R+z}$. *L'énoncé précise que* z *est faible devant* R, *d'où* $\dfrac{\Delta g}{g} \simeq -\dfrac{2\Delta z}{R}$.
- $\dfrac{\Delta g}{g} = -\dfrac{2 \times 100}{6\,400\,000} = -3{,}1 \cdot 10^{-5}$: *on ne garde que deux chiffres significatifs* 3 *et* 1.

ÉNONCÉ

n° 4 Le pendule d'une horloge a pour période 2 s à 20 °C, en un lieu où $g = 9{,}80$ m/s².

La période est donnée par $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, l longueur de ce pendule.

❶ Quelle est la variation de période lorsque la température devient 30 °C? $\lambda = 1{,}2.10^{-5}$ °C^{-1}

CORRIGÉ

- $T = 2\pi l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}$, *seul* l *varie d'où* $\dfrac{\Delta T}{T} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta l}{l}$, *comme* $\dfrac{\Delta l}{l} = \lambda\Delta\theta$ (*exercice* n° 2)

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\lambda\Delta\theta \Longrightarrow \Delta T = \frac{1}{2}\lambda\Delta\theta \cdot T$$

- $\Delta\theta = +10$ °C *d'où* $\Delta T = \dfrac{1}{2} \times 1{,}2.10^{-5} \times 10 \times 2 = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ s

ÉNONCÉ

❷ L'horloge est maintenant en un lieu où $g = 9{,}81$ m/s², la température étant 15 °C. Quelle est sa période d'oscillation?

CONSEIL

Prendre comme données initiales $\theta = 20$ °C, $g = 9{,}80$ m/s² et $T = 2$ s. Relier ΔT à Δg et $\Delta\theta$; en déduire la valeur $T + \Delta T$ à $\theta = 15$ °C et pour $g = 9{,}81$ m/s².

CORRIGÉ

- $\dfrac{\Delta T}{T} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta l}{l} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta g}{g} = \dfrac{1}{2}\lambda\Delta\theta - \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta g}{g}$
- $\Delta g = 0{,}01$ m/s² $\Delta\theta = -5$ °C *d'où* $\Delta T = -1{,}1 \cdot 10^{-3}$ s *d'où* $T = 1{,}9989$ s.

Calcul d'incertitude

Pb 2

■ Conseils généraux

Comment reconnaître les incertitudes? L'incertitude absolue est suivie de l'unité; l'incertitude relative est un nombre abstrait; si on ne précise rien l'incertitude est d'une unité du dernier chiffre significatif à droite (ainsi $t = 5{,}1$ s sous-entend que $\Delta t = 0{,}1$ s; $t = 5{,}10$ s $\Longrightarrow \Delta t = 0{,}01$ s).

Lorsqu'on applique les théorèmes des incertitudes, il faut *au préalable* évaluer la mesure indirecte à étudier en fonction des autres mesures.

Exemple. On mesure la tension U à ΔU près aux bornes d'une résistance parcourue par un courant I mesuré à ΔI près. Evaluer R et ΔR?

Le bon calcul conduit à une somme arithmétique :

$$U = RI \Longrightarrow R = \frac{U}{I} \text{ d'où } \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I}$$

Le mauvais calcul à une somme algébrique :

$$U = RI \Longrightarrow \frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta I}{I} \Longrightarrow \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} - \frac{\Delta I}{I}$$

ÉNONCÉ

n° 5. On veut déterminer la masse volumique ρ d'une sphère pleine, pour cela on mesure le diamètre: on trouve 10,0 cm à 2/10 mm près; on mesure la masse de la sphère on trouve $m = 3\,041$ g à 1 g près. « Encadrer » le résultat obtenu.

CONSEIL

Le volume d'une sphère est $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $\rho = \frac{M}{V}$. Calculer la valeur approchée de ρ, puis faire le calcul d'incertitude.

CORRIGÉ

- $\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}$. *La valeur approchée de* ρ *est* $\rho = \frac{3 \times 3\,041}{4 \times 3{,}1416 \times 5^3} = 5{,}81\ g/cm^3$.
- *Calcul d'incertitude :* $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta M}{M} + \frac{3\Delta R}{R} \Longrightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1}{3\,041} + \frac{3 \times 0{,}2}{100} \simeq \frac{1}{3000} + \frac{6}{1000}$

$$= \frac{19}{3000} \simeq \frac{2}{300}.$$

Pour calculer $\Delta\rho$ *on peut prendre pour* ρ *la valeur simple, approchée par excès :* $\rho = 6\ g/cm^3$.

D'où $\Delta\rho = 6 \times \frac{2}{300} = 0{,}04$ g/cm³, *par suite* $(5{,}81 - 0{,}04)\text{g/cm}^3 \leqslant \rho \leqslant (5{,}81 + 0{,}04)\text{g/cm}^3$

soit $5{,}77$ g/cm³ $\leqslant \rho \leqslant 5{,}85$ g/cm³ : *seul le chiffre* 5 *est certain.*

Remarquons : le résultat approché et l'incertitude doivent comporter le même nombre de décimales (ici 2), il est quelquefois nécessaire, l'incertitude étant calculée, de retoucher la valeur approchée qui a pu être donnée avec trop ou pas assez de décimales.

ÉNONCÉ

n° 6. Soit un pendule simple de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

❶ On mesure la longueur l ; $l = 1$ m à 1 mm près; l'intensité de la pesanteur g est égale à 9,81 N/kg à 0,01 N/kg près. Quelle est l'incertitude relative sur la période T?

CONSEIL

Pour calculer l'incertitude relative, il n'est pas nécessaire de calculer T, remarquer que T est une expression monôme.

CORRIGÉ

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l} + \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g} \Longrightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2\,000} + \frac{1}{2 \times 981} \simeq \frac{1}{1\,000}.$$

ÉNONCÉ

❷ Combien faut-il prendre de décimales de π pour le calcul de T? Effectuer ce calcul.

CONSEIL

On admet que l'incertitude sur π est négligeable si $\frac{\Delta\pi}{\pi}$ est au moins dix fois plus faible que les autres incertitudes relatives.

CORRIGÉ

Si on tient compte de l'erreur sur π; $\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta\pi}{\pi} + \left(\frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l} + \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}\right)$, *pour ne pas tenir compte de* $\frac{\Delta\pi}{\pi}$ *il faut que* $\frac{\Delta\pi}{\pi} < \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1\,000} \Longrightarrow \Delta\pi < \frac{\pi}{10\,000} = 3{,}2.10^{-4}$, *il faut donc prendre quatre décimales soit* 3,1416 *alors* $\Delta\pi = 10^{-4}$. *On trouve* $T = 2{,}006 \pm 0{,}002$ *s (remarquer encore que* T *et* ΔT *ont le même nombre de décimales).*

ÉNONCÉ

n° 7. Soit un pendule qui a pour longueur à 0 °C $l_0 = 64{,}0$ cm à 1 mm près. La durée de 100 oscillations est 160 s à 0,5 s près (la durée d'une oscillation ou période est donnée par $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$)

❶ Quelle précision peut-ont espérer sur *g?*

CONSEIL

Exprimer *g* en fontion de T et *l*. Soit *d* la durée des 100 oscillations, exploiter aussi $d = 100\,T$.

CORRIGÉ

$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \Longrightarrow \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{2\,\Delta T}{T}$ *Il y a deux exploitations équivalentes de* $d = 100T$: $\Delta d = 100\Delta T$ *si je considère que c'est une somme ; ou* $\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta T}{T}$ *si je considère que c'est un produit. Par suite* $\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{640} + \frac{2 \times 0{,}5}{160} = \frac{5}{640} \simeq \frac{8}{1\,000}$

ÉNONCÉ

❷ La température devient 30 °C, la variation de T est-elle détectable? Le coefficient de dilatation linéaire est $\lambda = 10^{-5}\ °C^{-1}$.

CONSEIL

Dans cette question nous noterons par δ... les variations, par Δ... les incertitudes absolues. Pour que δT soit détectable, il faut que $|\delta T| > \Delta T$.

CORRIGÉ

En effet tant que $|\delta T|$ *est inférieur à* ΔT *la variation peut être confondue avec une erreur sur* T.

Nous savons (exercice n° 4) que $\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{2}\lambda\delta\theta \Longrightarrow \frac{\delta T}{T} = \frac{1}{2}10^{-5} \times (30) = 1{,}5.10^{-4}$

Nous avons vu que $\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta d}{d} = \frac{0{,}5}{160} = \frac{1}{320} \simeq 3.10^{-3}$, *par suite* δT *n'est pas détectable.*

Calculs approchés

Conseils généraux

N'utiliser l'approximation $(1 + \varepsilon)^n \simeq n\varepsilon$, pour faire des calculs numériques que si la mise sous la forme $1 + \varepsilon$ est facile.

Les formules d'approximation servent aussi à modifier des formules, il faut faire apparaître un rapport faible devant 1 qu'on considérera comme ε.

---

n° 8. Calculer :

ÉNONCÉ

$$\frac{1{,}003}{0{,}996} \qquad \sqrt{100{,}8} \qquad \sqrt{\frac{995}{993}}$$

CONSEIL

Mettre sous la forme $(1 + \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)^{-1}$ | $10(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}$ | Remarquer $995 = 993 + 2$

CORRIGÉ

$(1 + 0{,}003)(1 - 0{,}004)^{-1}$
$(1 + 0{,}003)(1 + 0{,}004)$
$1 + 0{,}007 = 1{,}007$

$\sqrt{100{,}8} = \sqrt{100\,(1{,}008)}$
$10\,(1 + 0{,}008)^{\frac{1}{2}}$
$10\,(1 + 0{,}004) = 10{,}04$

$$\sqrt{\frac{995}{993}} = \sqrt{1 + \frac{2}{993}} = \left(1 + \frac{2}{993}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$(1 + 0{,}001) = 1{,}001$

---

n° 9. Soit S_0 l'aire d'un disque métallique homogène à 0 °C, exprimer son aire S à la température θ, montrer que S est pratiquement une fonction du 1er degré de θ.

ÉNONCÉ

Faire intervenir le rayon et sa loi de dilatation linéaire.

CONSEIL

- *Soit* r_0 *le rayon du disque à* 0 °C, r *le rayon à* θ °C
  $r = r_0(1 + \lambda\theta)$ *d'où* $S = \pi r^2 = \pi r_0^2 (1 + \lambda\theta)^2$; πr_0^2 *représente* S_0.
- *De façon rigoureuse* S *est du* 2e *degré en* θ. *Remarquons que* $\lambda\theta$ *est toujours faible devant* 1, *par suite* $S \simeq S_0(1 + 2\lambda\theta)$.

CORRIGÉ

---

n° 10. L'intensité de la pesanteur g est donnée par $g = g_0 \dfrac{R^2}{(R + z)^2}$, R rayon de la Terre, z altitude au-dessus de la Terre supposée sphérique. Montrer que si z est faible devant R, g est pratiquement une fonction du 1er degré de z.

ÉNONCÉ

Des élèves considèrent z comme petit devant 1 : c'est faux. C'est $\dfrac{z}{R}$ qui est petit devant 1 et qu'on posera égal à ε.

CONSEIL

Posons $\dfrac{z}{R} = \varepsilon$, *pour faire intervenir* ε *divisions par* R^2 *le numérateur et le dénominateur*

$$g = g_0 \frac{1}{\left(1 + \dfrac{z}{R}\right)^2} = g_0 (1 + \varepsilon)^{-2} \simeq g_0 (1 - 2\varepsilon) = g_0 \left(1 - 2\frac{z}{R}\right).$$

CORRIGÉ

ÉNONCÉ

n° 11. Soit $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ m_0 et c sont des constantes. Modifier cette formule pour des valeurs de v faibles devant c.

RÉPONSE

$$m = m_0 \left(1 + \frac{v^2}{2\,c^2}\right).$$

---

n° 12. Un condensateur plan est formé par deux armatures de surface S séparées par un isolant d'épaisseur $e_1 = 20{,}0$ mm.
La constante diélectrique de l'isolant est k.
On rappelle que la capacité d'un condensateur plan est donnée par

ÉNONCÉ

$$C = \frac{1}{36\,\pi\,.\,10^9}\,\frac{k\,S}{e}$$

❶ A partir de e_1, on augmente e. On admettra que la variation relative de e reste toujours faible devant 1. Relier la variation de C à la variation de e.

CORRIGÉ

Seul e *varie, d'où* $\dfrac{\delta C}{C} = -\dfrac{\delta e}{e}$ *d'où* $\delta C = -\dfrac{C_1}{e_1}\,\delta e$ · (C_1 *capacité pour* e_1)

ÉNONCÉ

❷ L'épaisseur e passe de $e_1 = 20{,}0$ mm à $e_2 = 20{,}6$ mm.
Soit ε la variation relative de C (qui passe de C_1 à C_2), calculer ε.
En déduire C_2 en fonction de C_1 et de ε.

CORRIGÉ

- *La variation relative de* C *est* $\varepsilon = \dfrac{\delta C}{C_1} = -\dfrac{\delta e}{e_1}$ *d'où* $\varepsilon = -\dfrac{0{,}6}{20} = -\dfrac{3}{100}$
- δC *représente la différence* $C_2 - C_1$, *donc*

$$\varepsilon = \frac{C_2 - C_1}{C_1} \Longrightarrow C_2 - C_1 = C_1\varepsilon \Longrightarrow C_2 = C_1(1 + \varepsilon)$$

ÉNONCÉ

❸ On place en série deux condensateurs identiques au précédent. Le premier, de capacité C_1, est réglé à $e_1 = 20{,}0$ mm; le second, de capacité C_2, est réglé à $e_2 = 20{,}6$ mm. Exprimer la capacité de l'ensemble en fonction de C_1 et de ε.

CORRIGÉ

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Longrightarrow C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

d'où :

$$C = \frac{C_1 \cdot C_1(1+\varepsilon)}{C_1 + C_1(1+\varepsilon)} = \frac{C_1^2(1+\varepsilon)}{C_1(1+1+\varepsilon)} = \frac{C_1(1+\varepsilon)}{2+\varepsilon}$$

Attention : $(2 + \varepsilon)^{-1} \neq 2 - \varepsilon$

$$C = C_1\,\frac{1+\varepsilon}{2\left(1 + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)} = \frac{C_1}{2}(1+\varepsilon)\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{C_1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Cinématique des mouvements rectilignes

Pb 4

■ Conseils généraux

— Faire un schéma de la trajectoire rectiligne en précisant le sens positif choisi, l'origine des élongations, l'origine des dates. On pourra aussi indiquer sur ce schéma les données de l'énoncé ce qui aidera à résoudre le problème. En particulier on dessinera les vecteurs $\vec{\gamma}$ et $\vec{v}$ ce qui permettra d'en déduire $\bar{\gamma}$ et $\bar{v}$.

— Il arrive qu'un mouvement ne puisse pas être décrit par une seule équation horaire, on découpe alors ce mouvement en parties ou phases faciles à étudier (voir exercice n° 17).

ÉNONCÉ

n° 13. Un mouvement rectiligne a pour équation $x = 2t^3 - 6t$. Étudier sa vitesse, son accélération; en déduire les parties accélérées et retardées.

CONSEIL

Nous commençons par ce mouvement non étudié en cours, pour bien vous rappeler que dans n'importe quel mouvement rectiligne $\bar{v} = \dfrac{dx}{dt}$ ($\bar{v}$ désignant la mesure algébrique de $\vec{v}$) et $\bar{\gamma} = \dfrac{d\bar{v}}{dt}$ ($\bar{\gamma}$ étant la mesure algébrique de $\vec{\gamma}$).

$$\bar{v} = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 6 \Longrightarrow \bar{\gamma} = \frac{d\bar{v}}{dt} = 12t.$$

Étudions à l'aide d'un tableau le signe de $\bar{v}\bar{\gamma}$ *si* $\bar{v}\bar{\gamma} > 0 \Longrightarrow$ *mouvement accéléré.*

CORRIGÉ

t	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
$\bar{v}$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\bar{\gamma}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
	mouvement retardé		mouvement accéléré		mouvement retardé		mouvement accéléré		

ÉNONCÉ

n° 14. Un point M, animé d'un mouvement uniformément accéléré, parcourt un segment AB, de longueur 120 cm, en 2 s. Il part de A sans vitesse.

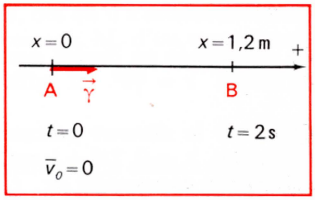
CORRIGÉ

❶ Quelle est son accélération?

Soit A *l'origine des espaces et soit l'instant du départ l'origine des temps. A l'instant* t = 0 *la vitesse est nulle, l'équation horaire est de la forme* $x = \dfrac{1}{2}\bar{\gamma}t^2$.

Lorsque M *est en* B, x *et* t *sont connus, on en déduit :*

$$\bar{\gamma} = \frac{2 \times 1{,}2}{4} = 0{,}6 \text{ m/s}^2.$$



ÉNONCÉ

❷ Quelle est la vitesse de M en B?

CORRIGÉ

Trois équations peuvent conduire au résultat :

$$\Delta\bar{v} = \bar{\gamma}\Delta t\,; \quad \bar{v} = \bar{\gamma}t + \bar{v}_0 \quad ou \quad \Delta(\bar{v}^2) = 2\bar{\gamma}\Delta x$$

Ainsi exploitons la deuxième qui prend dans ce mouvement l'expression :

$$\bar{v} = 0{,}6\,t \quad (\bar{v}_0 = 0) \quad pour \quad t = 2\,s \quad \bar{v} = 1{,}2 \text{ m/s}$$

ÉNONCÉ

❸ A quelle vitesse M passe-t-il au milieu de AB?

CORRIGÉ

Le milieu de AB *est repéré dans l'espace par* $x = 0{,}6$ m. *Nous voulons donc évaluer la valeur de* $\bar{v}$ *pour* $x = 0{,}6$, *la relation* $\Delta(\bar{v}^2) = 2\bar{\gamma}\Delta x$ *qui prend dans ce mouvement l'expression* $\bar{v}^2 = 1{,}2x$ *conduit à* $\bar{v}^2 = 1{,}2 \times 0{,}6 \Longrightarrow \bar{v} = \pm 0{,}85$ m/s. *Le mobile allant dans le sens positif, seule la solution* $\bar{v} = 0{,}85$ m/s *convient.*

Remarque : Ne pas confondre $\Delta(v^2)$ avec $(\Delta v)^2$: $\Delta(v^2)$ = carré de la vitesse finale — carré de la vitesse initiale.

ÉNONCÉ

n° 15. Un point M, avec une accélération égale à 0,4 m/s² parcourt un segment AB de longueur 10 m. Il part de A avec une vitesse égale à 1 m/s.

❶ Quelle est la durée du mouvement?

CORRIGÉ

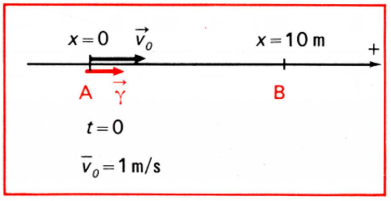
A *est l'origine des espaces, l'instant de départ, l'origine des temps. Écrivons l'équation horaire :*

$$x = \frac{1}{2} \times 0{,}4t^2 + t \quad (\bar{v}_0 = 1 \text{ m/s})$$

Le passage en B *est repéré dans l'espace par* $x = 10$ m, *dans le temps par* t *tel que :*

$10 = 0{,}2t^2 + t \Longrightarrow t' = -10$ s *et* $t'' = 5$ s

Seule la racine positive est à retenir donc la durée du mouvement est 5 s.



Remarque : Si le mouvement n'était pas borné dans le temps [0,5] *et l'espace* [AB], *on aurait un premier passage par* B *à l'instant* $t = -10$ s.

ÉNONCÉ

❷ Quelles distances le mobile M parcourt-il pendant la 1re, la 2e, la 3e, la 4e et la 5e seconde?

CONSEIL

Ce découpage en durées successives et égales conduit à une progression arithmétique de raison $r = \bar{\gamma}\theta^2$. Il suffit de calculer r et le 1er terme de la progression.

CORRIGÉ

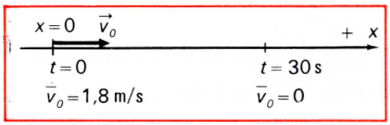
Calculons la distance parcourue pendant la première seconde. Au bout d'une seconde, l'équation $x = 0{,}2t^2 + t \Longrightarrow x = 1{,}2$ m. *Ensuite de seconde en seconde, les distances parcourues augmentent de* $r = \bar{\gamma}\theta^2$ *avec* $\theta = 1$ s *d'où* $r = 0{,}4$ m; *ce qui conduit à la suite arithmétique :* 1,2 m; 1,6 m; 2 m; 2,4 m; 2,8 m. *Leur somme égale* 10 m.

n° 16. Un point M, animé d'un mouvement uniformément varié, a pour vitesse initiale $v_0 = 1{,}8$ m/s dans le sens positif. Sa vitesse est nulle à l'intant $t = 30$ s.

ÉNONCÉ

1 Évaluer l'accélération.

$$\Delta\bar{v} = \bar{\gamma}\Delta t \Longrightarrow -1{,}8 = 30\bar{\gamma}$$
$$\text{d'où } \bar{\gamma} = -0{,}06 \text{ m/s}^2$$



CORRIGÉ

2 Quelle est l'équation horaire du mouvement?

ÉNONCÉ

- *Certains élèves se contentent de répondre : l'équation horaire est* $x = \frac{1}{2}\bar{\gamma}t^2 + \bar{v}_0 t + x_0$.

Ils ne donnent que la forme générale de l'équation horaire.

- *Il faut donner l'équation horaire de ce mouvement : en prenant* $x = 0$ *pour le point correspondant à l'instant* $t = 0$ $x_0 = 0$ $v_0 = 1{,}8$ m/s (*le vecteur* $\vec{v}_0$ *est dirigé dans le sens + de l'axe*) $\bar{\gamma} = -0{,}06$ m/s² *d'où l'équation horaire* $x = -0{,}03t^2 + 1{,}8t$. *C'est une relation entre* x *et* t.

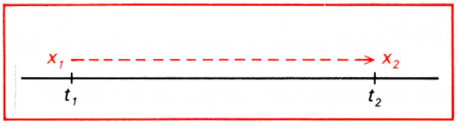
CORRIGÉ

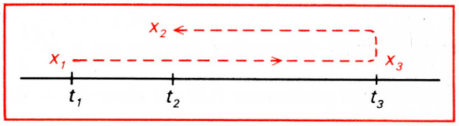
- *Certains élèves, trompés par le mot équation, cherchent à remplacer* t *par une certaine valeur : ils font alors une application numérique de l'équation pour cette valeur de* t.

3 Quelle distance a-t-il parcouru pendant les 40 premières secondes?

ÉNONCÉ

Attention : Pour calculer la distance d parcourue entre t_1 et t_2 :





CONSEIL

1er *cas :* $\bar{v}$ ne change pas de signe

$$d = |x_2 - x_1|$$

2e *cas :* $\bar{v}$ change de signe pour t_3 : $t_1 < t_3 < t_2$

$$d = |x_3 - x_1| + |x_2 - x_3|$$

Entre $t = 0$ *et* $t = 40$ s, $\bar{v}$ *s'annule et change de signe pour* $t = 30$ s. *L'équation horaire du mouvement* $x = -0{,}03t^2 + 1{,}8t$ *conduit à* $x_0 = 0$ *pour* $t = 0$; $x_1 = 27$ m *pour* $t = 30$ s; $x_2 = 24$ m *pour* $t = 40$ s.

Entre $t = 0$ *et* $t = 30$ s, M *parcourt* $|x_1 - x_0| = 27$ m; *entre* $t = 30$ s *et* $t = 40$ s, M *parcourt* $|x_2 - x_1| = 3$ m; *donc entre* $t = 0$ *et* $t = 40$ s, *la distance parcourue est* 30 m.

CORRIGÉ

---

n° 17. Un point M, animé d'un mouvement rectiligne part sans vitesse. Le démarrage se fait avec une accélération égale à 0,8 m/s². Puis le point M, dès qu'il a atteint la vitesse 8 m/s, parcourt 24 m à cette vitesse. Enfin, au cours du freinage, M, d'un mouvement uniformément retardé, parcourt 8 m jusqu'à l'arrêt.

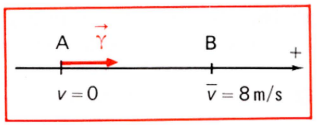
ÉNONCÉ

1 Quelle est la durée du mouvement?

Le mouvement comprend trois phases qu'on étudiera séparément. En dehors des chocs, la vitesse d'un objet matériel ne subit pas de discontinuités au cours de ses variations. La vitesse finale d'une phase est donc égale à la vitesse initiale de la phase suivante.

CONSEIL

1re *phase (accélérée)* : M *part de* A, *arrive en* B *à* 8 m/s



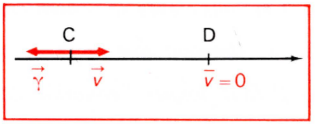
$$\frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \bar{\gamma} \Longrightarrow \Delta t = \frac{\Delta \bar{v}}{\bar{\gamma}} = \frac{8 - 0}{0{,}8} = 10 \text{ s.}$$

2e *phase (uniforme)* : M *part de* B *à* 8 m/s, *arrive en* C *à* 8 m/s $\overline{BC} = 24$ m

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \Delta x = \overline{BC} \Longrightarrow \Delta t = \frac{24}{8} = 3 \text{ s.}$$

CORRIGÉ

3e *phase (retardée)* : M *part de* C *à* 8 m/s, *arrive en* D *à* 0 m/s.



$$\Delta x = \overline{CD} = 8 \text{ m} \qquad \Delta(v^2) = 2\,\bar{\gamma}\Delta x$$

d'où $\bar{\gamma} = \dfrac{\Delta(v^2)}{2\Delta x} = \dfrac{0 - 64}{2 \times 8} = -4 \text{ m/s}^2$

$$\frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \bar{\gamma} \Longrightarrow \Delta t = \frac{\Delta \bar{v}}{\gamma} = \frac{0 - 8}{-4} = 2 \text{ s.}$$

La durée du mouvement est donc $10 + 3 + 2 = 15$ s.

ÉNONCÉ

❷ Quelle est la distance parcourue ?

CORRIGÉ

La distance parcourue est AB + BC + CD. CD = 8 m *et* BC = 24 m, *calculons* AB *dans la* 1re *phase. Si le point* A *et l'instant de passage en* A *sont les origines des espaces et des temps, l'équation horaire est* $x = \frac{1}{2}\bar{\gamma}t^2 = \frac{1}{2}0{,}8t^2$ *pour* $t = 10$ s ; $x = 40$ m = AB.

La distance parcourue AD *est donc* $40 + 24 + 8 = 72$ m.

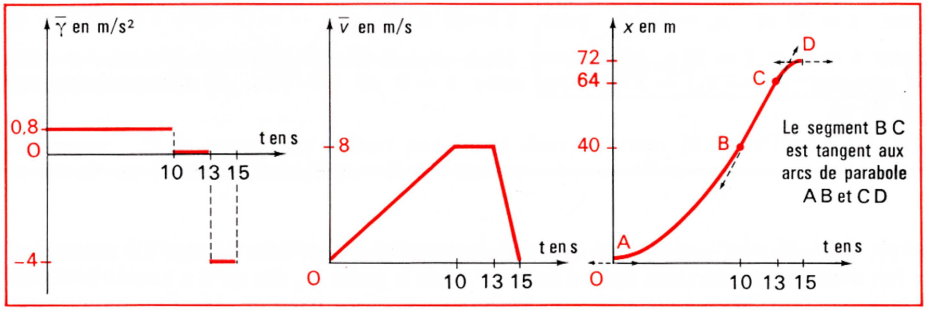
ÉNONCÉ

❸ Représenter les diagrammes des accélérations, vitesses et espaces.

CONSEIL

L'accélération subit deux discontinuités, mais la vitesse est fonction continue de *t*. La vitesse représentant la pente de la tangente du diagramme des espaces, en chaque point de ce diagramme il n'y a qu'une tangente, donc pas de point anguleux. Les diagrammes d'espace des différentes phases doivent donc se raccorder tangentiellement.

CORRIGÉ



ÉNONCÉ

n° 18. Déterminer l'amplitude, la période et la phase initiale des mouvements d'équation horaire (système SI)

❶ $x = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}$. | ❷ $s = 10^{-3}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$. | ❸ $y = 3\cos 2\pi\frac{t}{T'}$.

CONSEIL

Ramener à la forme $a \sin(\omega t + \varphi)$ avec a et $\omega > 0$: a est alors l'amplitude, φ la phase initiale.

CORRIGÉ

$x = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{t}{2} + \pi\right)$.

amplitude 0,5 m
phase initiale π rd

période $T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi =$ 12,56 s

$s = 10^{-3} \sin\left(2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$.

amplitude 10^{-3} m = 1 mm
phase initiale $-2\pi x/\lambda$ rd

période T

$y = 3 \sin\left(2\pi \frac{t}{T'} + \frac{\pi}{2}\right)$.

amplitude 3 m
phase initiale $\pi/2$ rd

période T'

ÉNONCÉ

n° 19. Soit un mouvement d'équation horaire $z = 2 + \sin(-100\pi t)$.

❶ Autour de quel point oscille-t-il ? Quelle est son amplitude, sa période, sa phase initiale ? z est en millimètres.

CORRIGÉ

Ramenons à la forme a *sin* $(\omega t + \varphi)$

$$z - 2 = \sin(100\pi t + \pi).$$

Soit O' *le point d'abscisse* $z = 2$. *Posons* $z - 2 = \overline{O'M} = Z$, *l'équation horaire devient* $Z = \sin(100\pi t + \pi)$. *Le mobile oscille autour de la position* $Z = 0$, *c'est-à-dire autour de* O'. *Son amplitude est* 1 mm. *Sa phase initiale* π rd, *sa période*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50} \text{ s} = 2.10^{-2}\text{s}.$$

ÉNONCÉ

❷ Quelle est la vitesse maximale du mobile ?

CORRIGÉ

$$\bar{v} = \frac{dz}{dt} = \frac{d[2 + \sin(-100\pi t)]}{dt} = \frac{d[\sin(-100\pi t)]}{dt} = \cos(-100\pi t) \times -100\pi,$$

d'où $\bar{v} = -100\pi . \cos(-100\pi t)$. v *est maximum pour* $|\cos(-100\pi t)| = 1$, *donc*

$$v_m = 100\pi = 314 \text{ mm/s} = 0{,}314 \text{ m/s}.$$

Remarque : on obtient la même expression à partir de Z; $\bar{v} = \frac{dZ}{dt}$.

ÉNONCÉ

n° 20. Un point matériel M, animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal, part d'une position extrême A, atteint l'autre position extrême B au bout de 10 s, parcourant ainsi 10 cm.

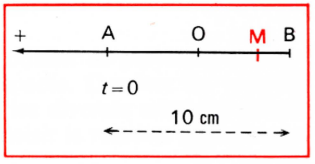
❶ Ecrire l'équation horaire du mouvement.

CONSEIL

Dans les mouvements rectilignes sinusoïdaux, il est conseillé de prendre le milieu du segment trajectoire comme origine des espaces.

CORRIGÉ

Prenons O *milieu de* AB *comme origine des espaces, orientons l'axe des* x *de* O *vers* A. *Soit l'instant du départ l'origine des temps.*



$\overline{OM} = x = a \sin(\omega t + \varphi)$ $\quad a = \frac{AB}{2} = 5.10^{-2}\text{m}.$

En 10 s *le point* M *passe de* A *à* B, 10 s *est la durée d'un battement ; une oscillation qui comprend deux battements a pour durée la période* T = 20 s *d'où* $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{10}$ rd/s.

CORRIGÉ

A l'instant t = 0, M *est en* A : x = a *d'où* a *sin* φ = a $\Longrightarrow \varphi = \pi/2$.
L'équation du mouvement est donc

$$x = 5.10^{-2} \sin\left(\frac{\pi}{10}t + \frac{\pi}{2}\right) = 5.10^{-2} \cos\frac{\pi}{10}t.$$

ÉNONCÉ

❷ Quelle est la vitesse maximale de M ?

CORRIGÉ

$\overline{v} = \frac{dx}{dt} = -5 \cdot 10^{-2}\frac{\pi}{10} \sin\frac{\pi}{10}t$, v *est maximale lorsque* $\left|\sin\frac{\pi}{10}t\right| = 1$;
d'où $v_m = 5\pi 10^{-3} = 1{,}57 \cdot 10^{-2}$ m/s

ÉNONCÉ

❸ Quelle est l'accélération de M en B ?

CORRIGÉ

$\bar{\gamma} = -\omega^2\overline{OM}$ *donc* $\bar{\gamma} = -\frac{\pi^2}{100} \times (-5 \cdot 10^{-2}) = 4{,}9 \cdot 10^{-3}$ m/s².

ÉNONCÉ

❹ Au bout de combien de temps M passe-t-il pour la 3e fois au point P situé à 2,5 cm de A ?

Pour P ; $x = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ m $\Longrightarrow 5 \cdot 10^{-2} \sin\left(\frac{\pi}{10}t + \frac{\pi}{2}\right) = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$

$$\Longrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{10}t + \pi/2\right) = \frac{1}{2} = \sin \pi/6.$$

CORRIGÉ

— *Première série de solutions :*

$$\frac{\pi}{10}t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Longrightarrow t = -\frac{20}{6} + 20k.$$

Les premières valeurs positives sont t = 16,7 s (*pour* k = 1) ; t = 36,7 s *pour* k = 2....
— *Deuxième série de solutions* :

$$\frac{\pi}{10}t + \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Longrightarrow t = \frac{20}{6} + 20k.$$

Les premières valeurs positives sont t = 3,3 s (k = 0) ; t = 23,3 s (k = 1)....
En résumé M *passe en* P *au bout de* 3,3 s ; 16,7 s ; 23,3 s *qui correspond au* 3e *passage.*

Chute libre

Pb 5

■ **Conseils généraux**

On ne considérera que des chutes libres : la résistance de l'air est donc négligée.
Ne pas oublier que dans n'importe quelle chute libre le vecteur accélération est le vecteur $\vec{g}$: vertical, dirigé vers la Terre, de module g qu'on supposera constant au cours de la chute.

---

n° 21. Un cylindre abandonné sans vitesse parcourt 20 m dans sa dernière seconde de chute. $g = 10$ m/s².

ÉNONCÉ

❶ Quelle est la durée de chute ?

CONSEIL

Orienter la trajectoire verticale vers le bas. Prendre pour origine des temps l'instant du départ, pour origine des espaces, le point de départ. Soit t la durée de chute, étudier la variation de x entre $t - 1$ et t_0. Ne pas croire que la vitesse finale est 20 m/s.

CORRIGÉ

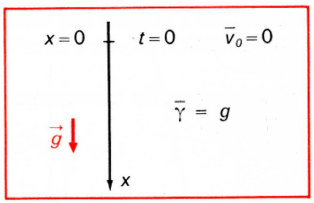
La mesure algébrique de $\vec{g}$ *sur* $\overrightarrow{Ox}$ *est* $\bar{\gamma} = g$.

L'équation horaire est $x = \frac{1}{2}\gamma t^2 = 5\ t^2$.

Entre $t - 1$ *et* t *le cylindre parcourt* 20 m *d'où* $x_t - x_{t-1} = 20$

$$5\ t^2 - 5\ (t - 1)^2 = 20 \Longrightarrow t = 2{,}5 \text{ s.}$$

La chute dure donc 2,5 s.



ÉNONCÉ

❷ Quelle est la vitesse du cylindre au bout de 10 m de chute ?

CORRIGÉ

Nous cherchons à calculer v *pour* $x = 10$ m ; *d'après* $\Delta(v^2) = 2\bar{\gamma}(\Delta x)$ *qui a pour expression dans cette chute* $v^2 - 0 = 20\ x$ *on en déduit* $v^2 = 200$ *pour* $x = 10$ m ;

d'où $$v = 10\sqrt{2} = 14{,}1 \text{ m/s.}$$

ÉNONCÉ

❸ Quelle est la vitesse du cylindre lorsqu'il arrive au sol ?

CONSEIL

Il s'agit de la vitesse, juste avant le contact avec le sol, après, la vitesse est évidemment nulle.

CORRIGÉ

Le sol est atteint à l'instant $t = 2{,}5$ s. *Nous voulons calculer* v *à cet instant.*
D'après $\bar{v} = \bar{\gamma}t + v_0 \Longrightarrow v = 10 \times 2{,}5 = 25$ m/s.

---

n° 22. D'un point O situé à 5 m au-dessus du sol, on lance verticalement une bille vers le haut avec une vitesse initiale égale à 4,0 m/s. $g = 10$ m/s².

ÉNONCÉ

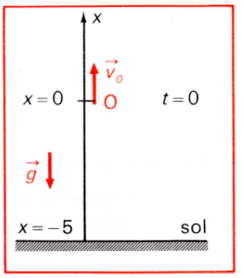
❶ A quelle hauteur au-dessus de O la pierre monte-t-elle ?

CONSEIL

Pour les élèves qui auraient encore des difficultés : ne pas oublier de préciser l'orientation choisie pour la trajectoire, l'origine des temps, des espaces. Dessiner les vecteurs connus et en déduire $\bar{\gamma}$, $\bar{v}_0$, x_0. Ecrire sur votre brouillon les diverses relations reliant dans cette chute x et t ; $\bar{v}$ et t ; $\bar{v}$ et x. Suivant la question, choisir la relation intéressante.

CORRIGÉ

Le choix de l'instant de départ pour origine des temps, et du point de départ pour origine des espaces s'impose. Quant à l'orientation de la trajectoire, on peut orienter vers le haut ou vers le bas : la bille se déplaçant de part et d'autre de O. *Nous orientons l'axe vers le haut, dans ce cas* $\bar{\gamma} = -g$ *et* $\bar{v}_0 = 4$ m/s. *Lorsque la bille rebrousse chemin sa vitesse s'annule en changeant de signe. Nous cherchons donc* x *pour* $\bar{v} = 0$.



$$\Delta(v^2) = 2\bar{\gamma}\Delta x \Longrightarrow 0 - \bar{v}_0^2 = -2gx$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-16}{-20} = 0{,}8 \text{ m}.$$

ÉNONCÉ

❷ Quelle est la vitesse de la bille lorsqu'elle repasse en O ?

CORRIGÉ

Pour $x = 0$, *nous connaissons la vitesse à l'aller* $\bar{v}_0 = 4$ m/s, *appelons* $\bar{v}_1$ *la vitesse au retour* ($\bar{v}_1$, *sera négative*)

$$\bar{v}_1^2 - \bar{v}_0^2 = -2g\Delta x \qquad \textit{puisque } \Delta x = 0 \qquad \bar{v}_1^2 = \bar{v}_0^2 = 16$$

d'où $v_1 = v_0 = 4{,}0$ m/s *(notons que* $\bar{v}_1 = -4{,}0$ m/s*)*.

ÉNONCÉ

❸ Quelle est la durée mise par la bille pour aller de O au sol ?

CONSEIL

Certains élèves calculent la durée de montée, puis la durée de descente en changeant le choix de l'origine des dates et des espaces pour étudier le retour. C'est inutile : une seule équation horaire décrit le mouvement de montée et de descente.

CORRIGÉ

En respectant les conventions du ❶, *l'équation horaire du mouvement est de la forme*

$$x = \frac{1}{2}\bar{\gamma}t^2 + \bar{v}_0 t + x_0 \quad \textit{c'est-à-dire} \quad x = -5t^2 + 4t.$$

Le sol est repéré dans l'espace par $x = -5$, *d'où* $-5 = -5t^2 + 4t \Longrightarrow t = \dfrac{4 \pm 10{,}8}{10}$ s.

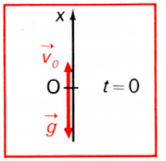
Seule la racine positive convient et donne la durée du mouvement : $t = 1{,}48$ s.

ÉNONCÉ

n° 23. Une balle est lancée vers le haut avec une vitesse de 6 m/s. Une seconde plus tard, une deuxième balle est lancée du même point, à la même vitesse. Où et quand les deux balles se rencontreront-elles ? ($g = 10$ m/s^2.)

CORRIGÉ

L'origine des espaces est la position de départ de la première balle, l'origine des temps l'instant de son départ ; d'où l'équation horaire de son mouvement :



$$x_1 = \frac{1}{2}\bar{\gamma}t^2 + \bar{v}_0 t + x_0 = -5t^2 + 6t \qquad (1)$$

Notons que t *est l'intervalle de temps qui sépare l'instant du départ de celui où l'abscisse égale* x_1.

La deuxième balle reproduit le même mouvement, entre l'instant t *et l'instant de son départ il ne s'écoule que* (t − 1) *secondes, la relation* (1) *s'applique encore, à condition de remplacer* t *par* (t − 1), *d'où l'équation horaire :*

$$x_2 = -5(t-1)^2 + 6(t-1) = -5t^2 + 16t - 11.$$

Lors de la rencontre les deux balles ont la même abscisse, donc :

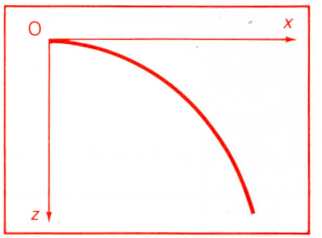
$x_1 = x_2 \Longrightarrow -5t^2 + 6t = -5t^2 + 16t - 11 \Longrightarrow t = 1{,}1$ s $\Longrightarrow x_1 = x_2 = 0{,}55$ m.

Remarque : $\bar{v}_1 = -10t + 6 = -5$ m/s *la première balle descend,*

$\bar{v}_2 = -10t + 16 = 5$ m/s *la seconde monte ; c'est un croisement.*

n° 24. Le cylindre d'une machine de Morin a un diamètre D = 14 cm. On chronomètre la durée de 20 tours, on trouve 20 s. Sur le tracé obtenu on repère les points suivants :

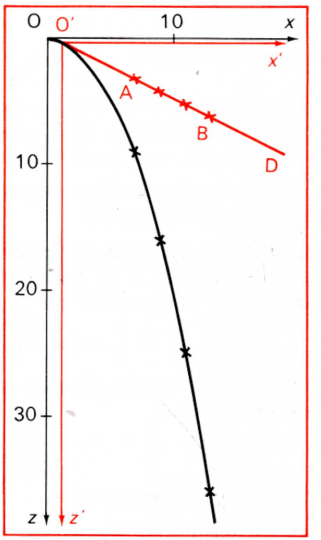
x en cm	7	9	11	13
z en cm	9	16	25	36



ÉNONCÉ

❶ Tracer la courbe obtenue (échelle 1/2). Représenter sur la même figure $\sqrt{z}$ en fonction de x. Où se trouvait la pointe du stylet au moment du départ ? Soit O′ ce point. Tracer les axes O′x′, O′z′) parallèles aux précédents. Que représentent z' et x' ? Comment varie $\sqrt{z'}$ en fonction du temps de chute ?

CORRIGÉ



● $\sqrt{z}$ *est représenté sur le graphe en prenant la convention que* $\sqrt{1\text{ cm}}$ *sera représenté par* 1 cm, *dans ces conditions à* z = 9 *correspond* $\sqrt{z} = 3$, ...

● *On constate que les points représentant* $\sqrt{z}$ *sont alignés suivant la droite* D. D *coupe* Ox *en* O′.

● *Que représente* O′*? La courbe qui part de l'axe tangentiellement ne permet pas de déterminer le point de départ de façon précise.*
Au contraire l'intersection O′ *de* D *et* Ox *est déterminée de façon précise,* O′ *qui correspond à* $\sqrt{z} = 0$ *donc à* z = 0 *est donc bien le point de départ de la pointe du stylet.*

● *Que représentent* z′ *et* x′*?*
z′ = z *représente la hauteur de chute en* cm.
Le cylindre tournant à vitesse constante, x′ *est proportionnel au temps de chute :* $x' = k_1 t$ *(*x′ = 0 correspond *bien à* t = 0*).*

● *Dans le système d'axes* (O′x′, O′z′), *l'équation de* D *est* $\sqrt{z'} = k_2 x'$ *(*k_2 *est la pente de* D*).*

Par suite $\sqrt{z'} = k_2 (k_1 t) = Kt$ *en posant* $k_1 k_2 = K$:
$\sqrt{z'}$ *est donc proportionnelle à* t *(ou ce qui revient au même* $\sqrt{z'}$ *est fonction linéraire de* t*).*

ÉNONCÉ

❷ Que peut-on en déduire quant à la nature du mouvement ?

CORRIGÉ

● *Nous venons de voir* $\sqrt{z'} = Kt$ *d'où* $z' = K^2t^2$ *comme* $z = z' \Longrightarrow z = K^2t^2$. *Le mouvement est donc uniformément accéléré d'accélération* g *telle que* $z = \frac{1}{2}gt^2$, *donc telle que* $g = 2K^2$. *Evaluons* K *donc* k_1 et k_2.

● *Pendant un tour de durée* T = 1s *le stylet décrit horizontalement une circonférence d'où* $\frac{x'}{t} = k_1 = \frac{\pi D}{T} \Longrightarrow k_1 = 14\pi$ (cm/s).

k_2 *représente la pente de* D. *Soient* A *et* B *deux points de* D, *pour* B, $\sqrt{z'} = 6$, *pour* A, $\sqrt{z'} = 3$. *On ne connaît pas les valeurs* x′ *pour* A *et* B, *mais entre* A *et* B

$$\Delta x' = \Delta x = 13 - 7 = 6.$$

CORRIGÉ

On en déduit donc

$$k_2 = \frac{\Delta(\sqrt{z'})}{\Delta x'} = \frac{6-3}{6} = \frac{1}{2}\ (\text{cm}^{-\frac{1}{2}}).$$

● *Donc*

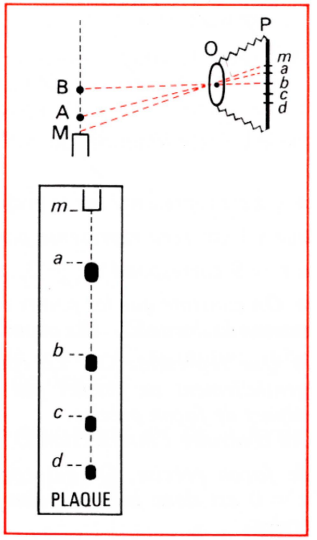
$K = k_1 k_2 = 7\pi\ (\text{cm}^{\frac{1}{2}}/\text{s}) \Longrightarrow g = 2K^2 = 2 \cdot 49\pi^2\ \text{cm/s}^2 \simeq 967\ \text{cm/s}^2 = 9{,}67\ \text{m/s}^2.$

ÉNONCÉ

n° 25. Dans une salle obscure une bille est lancée verticalement vers le haut d'un point M. Au cours de son mouvement une lampe flash produit un éclair tous les 1/10 s, l'obturateur de l'appareil photographique est constamment ouvert. Après développement, on voit sur la plaque l'image *m* du dispositif de lancement M et les images de la bille qui sont des taches de plus en plus courtes. Soient *a*, *b*, *c*, *d* le début de ces taches.

ma = 21 mm *ab* = 36 mm *bc* = 28 mm *cd* = 20 mm.

La trajectoire de la bille est à 2 m de l'objectif. La plaque photographique P est à 16 cm de l'objectif qu'on assimilera à une lentille mince convergente.



❶ Quelle est la distance focale et le grandissement linéaire de l'objectif?

CORRIGÉ

Soit p *la distance trajectoire-objectif,* p′ *la distance plaque-objectif,* f *la distance focale. L'objet réel bille donne une image réelle sur la plaque d'où*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \Longrightarrow f = \frac{pp'}{p+p'} = 14{,}8\ \text{cm}.$$

On passe du milieu objet au milieu image par une homothétie de centre O : *centre optique de l'objectif*

$$\frac{ma}{MA} = \frac{ab}{AB} = .. = \frac{p'}{p} = \frac{16}{200} = \frac{8}{100}$$

c'est le grandissement.

ÉNONCÉ

❷ Quelle est la nature du mouvement? En déduire la décélération.

CONSEIL

Lorsque la bille passe de A à B, de B à C, ... il s'écoule 1/10 s. Mais attention le départ de la bille de M n'est pas synchronisé avec le déclenchement du flash : de M à A la bille met moins de 1/10 s.

CORRIGÉ

AB, BC, CD *sont des distances parcourues par la bille pendant des temps successifs et égaux à* 0,1s.

Nous remarquons que ab, bc, cd *sont en progression arithmétique de raison* $r' = -8$ mm ($bc = ab - 8$, $cd = bc - 8$).

Il s'en suit que AB, BC, CD *sont en progression arithmétique de raison* r *telle que* $\frac{r'}{r} = \frac{p'}{p} = \frac{8}{100}$ *(grandissement), d'où* $r = -\frac{100}{8} \times 8 = -100\ \text{mm} = -0{,}1\ \text{m}.$

Le mouvement de la bille est donc uniformément décéléré. Nous savons que la raison de la progression $|r| = \gamma\theta^2$, θ *étant l'intervalle de temps* 0,1 s.

$\gamma = \frac{0{,}1}{(0{,}1)^2} = 10\ \text{m/s}^2$. *C'est l'accélération de la pesanteur* g.

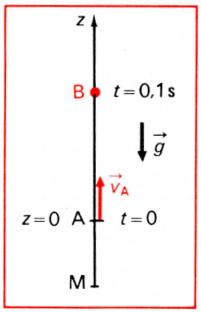
ÉNONCÉ

❸ Quelle est la vitesse de la bille lors de l'inscription de *a*? Avec quelle vitesse est-elle lancée?

CONSEIL

Orienter la trajectoire de la bille vers le haut, prendre comme origine des espaces le point A et comme origine des temps l'instant de passage en A. Il faut déterminer v_A.

CORRIGÉ



● $\bar{\gamma} = -g$, *d'où* $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_A t = -5t^2 + v_A t$.

Pour évaluer v_A *écrivons qu'à l'instant* $t = 0{,}1$ s, *la bille est en* B : $z = \overline{AB} = 36 \times \frac{100}{8} = 450$ mm $= 0{,}45$ m

$$0{,}45 = -5 \times 10^{-2} + v_A 10^{-1} \Longrightarrow v_A = 5 \text{ m/s}$$

● *Déterminons* v_M. *Le point* M *dans le repère précédent a pour abscisse*

$$z = -\frac{21 \times 100}{8} = 262{,}5 \text{ mm} = -0{,}2625 \text{ m}.$$

$$v_M^2 - v_A^2 = -2g\, z_M \Longrightarrow v_M^2 = 25 + 20 \times 0{,}2625$$
$$v_M = 5{,}5 \text{ m/s}$$

ÉNONCÉ

❹ Au bout de combien de temps après le départ de la bille, le premier éclair se produit-il ?

CORRIGÉ

Le premier éclair se produit à l'instant du passage en A. *Il faut donc évaluer la durée* Δt *entre le départ de* M *et le passage en* A.

$$\frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \bar{\gamma} \Longrightarrow \frac{\overline{v_A} - \overline{v_M}}{\Delta t} = -g \Longrightarrow \Delta t = \frac{5 - 5{,}5}{-10} = 0{,}05 \text{ s}.$$

ÉNONCÉ

❺ La durée d'un flash est $\theta' = 10^{-3}$ s, montrer que les longueurs des taches sont en progression arithmétique.

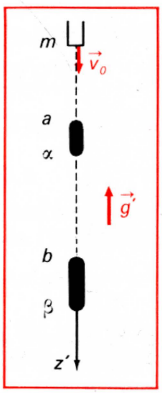
On peut supposer que l'image de la bille part de a *à* $v_0 = v_A \times \frac{8}{100}$, *puis a un mouvement uniformément retardé, vers le bas, d'accélération* $g' = g \times \frac{8}{100}$.

L'équation horaire est $z' = -\frac{1}{2}g't^2 + v_0 t$.

$t = 0 \quad z' = 0$
$t = \theta' \; z' = -\frac{1}{2}g'\theta'^2 + v_0\theta'$

$$\Longrightarrow a\alpha = -\frac{1}{2}g'\theta'^2 + v_0\theta'.$$

CORRIGÉ



$t = \theta \qquad z' = -\frac{1}{2}g'\theta^2 + v_0\theta$
$t = \theta + \theta' \; z' = -\frac{1}{2}g'(\theta + \theta')^2 + v_0(\theta + \theta')$

$$\Longrightarrow b\beta = -g'\theta\theta' - \frac{1}{2}g'\theta'^2 + v_0\theta'.$$

d'où $b\beta = a\alpha - g'\theta\theta'$: *les taches ont donc des longueurs en progression arithmétique de raison* $-g'\theta\theta'$ *c'est-à-dire*

$$-10 \times 10^{-1} \times 10^{-3} \times \frac{8}{100} = -8 \cdot 10^{-5} \text{ m} = -0{,}08 \text{ mm}.$$

ÉNONCÉ

n° 26. (Bac.) Un diapason inscrit ses oscillations sur une plaque enfumée mobile. On mesure les longueurs occupées sur la plaque par l'enregistrement de 5 vibrations consécutives et l'on trouve pour ces longueurs AB = 13 mm, BC = 29 mm, CD = 45 mm, DE = 61 mm, EF = 77 mm.

❶ Montrer que ces mesures vérifient que le mouvement de la plaque est uniformément accéléré.

CORRIGÉ

Soit θ *la durée d'une vibration, les distances* AB, BC... *sont parcourues pendant des intervalles de temps successifs et égaux à* θ.
Nous constatons que

$$BC - AB = CD - BC = DE - CD = EF - DE = 16 \text{ mm} = 1{,}6.10^{-2} \text{ m}.$$

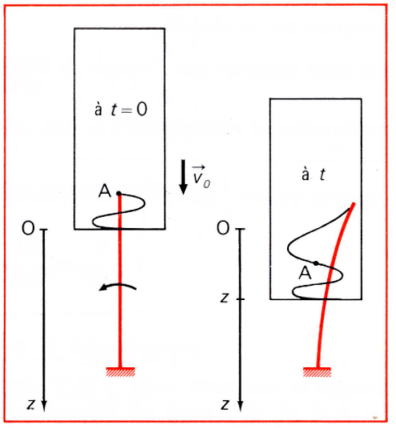
Les espaces parcourus pendant des temps successifs θ *forment une progression arithmétique : le mouvement est donc uniformément accéléré. Soit* γ *l'accélération,* γ *et* θ *sont reliés par* $r = \gamma\theta^2$, *d'où* $\gamma\theta^2 = 1{,}6.10^{-2}$ m.

ÉNONCÉ

❷ On inscrit en même temps sur la plaque des signaux donnés par un chronomètre et séparés par un intervalle de 1/5 de seconde. Le premier de ces signaux s'inscrit en un point M situé entre A et B tel que AM = 4,5 mm; le suivant coïncide avec le point F. Calculer le nombre d'oscillations par seconde du diapason.

CORRIGÉ

● *La position de la plaque, lors de l'inscription de* A *est prise pour origine des espaces, l'instant de l'inscription pour origine des temps. La plaque a alors la vitesse* v_0.



● *L'équation horaire de la plaque est*

$$z = \frac{1}{2}\bar{\gamma}t^2 + \overline{v_0}t.$$

Remarquons que

$$\bar{\gamma} > 0 \ \overline{v_0} > 0 \Longrightarrow z = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t.$$

● B *s'inscrit à l'instant* $t = \theta$

$$z = AB = \frac{1}{2}\gamma\theta^2 + v_0\theta.$$

Comme $\gamma\theta^2 = 1{,}6.10^{-2}$ m

$$\Longrightarrow v_0\theta = AB - \frac{\gamma\theta^2}{2} = 5.10^{-3}\text{m}.$$

● M *s'inscrit à un instant* t *non connu mais compris entre* 0 *et* θ *puisque* M *est entre* A *et* B. *Posons que* M *s'inscrit à l'instant* $t = \varepsilon\theta$, ε *étant un nombre à déterminer compris entre* 0 *et* 1.

Pour $t = \varepsilon\theta$, $z = AM = \frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2\theta^2 + v_0\varepsilon\theta$, *on connaît* $\gamma\theta^2 = 1{,}6.10^{-2}$ m, $v_0\theta = 5.10^{-3}$ m, $AM = 4{,}5\ 10^{-3}$ m, *on peut donc en déduire* ε.

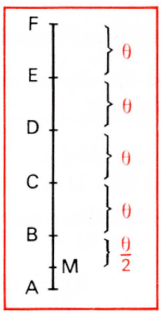
$$8.10^{-3}\varepsilon^2 + 5.10^{-3}\varepsilon - 4{,}5.10^{-3} = 0 \text{ soit } 8\varepsilon^2 + 5\varepsilon - 4{,}5 = 0.$$

On en déduit $\varepsilon = -\frac{5 \pm 13}{16}$, *seule la racine positive convient :* $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

CORRIGÉ

● *Ainsi* AM *est parcouru en* $\frac{\theta}{2}$s, *donc* MB *est parcouru en* $\frac{\theta}{2}$s.

Pendant $\frac{1}{5}$s, *entre les inscriptions de* M *et de* F, *le diapason effectue* $\left(\frac{1}{2} + 4\right)$ *vibrations, donc en une seconde il effectue* $4{,}5 \times 5 = 22{,}5$ *vibrations.*



ÉNONCÉ

❸ Calculer l'accélération du mouvement de la plaque et sa vitesse au moment de l'inscription du point A.

CORRIGÉ

$\theta = \frac{1}{22{,}5}$s $\quad \gamma\theta^2 = 1{,}6.10^{-2} \Longrightarrow \gamma = 1{,}6.10^{-2} \times (22{,}5)^2 = 8{,}1$ m/s²

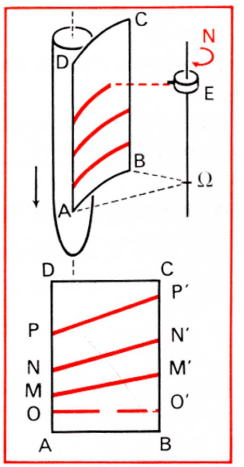
$v_0\theta = 5.10^{-3}$; $v_0 = 5.10^{-3} \times 22{,}5 = 0{,}112$ m/s

---

ÉNONCÉ

n° 26 *bis.* Un encrier E, tournant à la vitesse N = 20 tr/s, projette un fin jet d'encre sur une surface cylindrique ABCD, fixée sur une solide S. S peut tomber en chute libre devant l'encrier. Le solide étant fixé on obtient le tracé OO′. Au cours de la chute sont tracés les segments MM′, NN′, PP′.

OM = 8 mm O′M′ = 10 mm
ON = 39,5 mm O′N′ = 44 mm L'angle AΩB = 36°
OP = 96 mm O′P = 103 mm



❶ Déterminer les distances parcourues par le cylindre, MN, puis NP. En déduire la valeur de l'accélération de la pesanteur *g*.

CORRIGÉ

● MN = ON — OM = 31,5 mm, *de même* NP = 56,5 mm.
● *Ces distances sont parcourues pendant que l'encrier fait un tour, c'est-à-dire, pendant deux intervalles de temps successifs, égaux à* $\theta = 1/N = 0{,}05$ s.
Ce sont les premiers termes d'une progression arithmétique de raison r = NP — MN = 25 mm

$$r = g\theta^2 \Longrightarrow g = \frac{r}{\theta^2} = \frac{25.10^{-3}}{25.10^{-4}} = 10 \text{ m/s}^2.$$

ÉNONCÉ

❷ En tenant compte du fait que les segments MM′ et NN′ sont pratiquement rectilignes, évaluer la vitesse du solide S lors de l'inscription de MM′, puis lors de l'inscription de NN′.
En déduire la valeur de l'accélération de la pesanteur *g*.

CORRIGÉ

● *Les segments sont inscrits pendant que l'encrier accomplit une rotation de* 36° = 1/10 tr. *Pendant ce court intervalle de temps,* 1/200 s, *la vitesse varie peu, les segments sont rectilignes. Donc :*

$$v_M = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \Delta x = O'M' - OM = 2 \text{ mm} \qquad \Delta t = 1/200 \text{ s}$$

donc $v_M = 0{,}4$ m/s *de même* $v_N = 0{,}9$ m/s.

● *L'accroissement de vitesse* $\Delta v = v_N - v_M$ *s'est produit pendant l'intervalle de temps* $\theta = 0{,}05$ s.

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = g \Longrightarrow g = \frac{0{,}5}{0{,}05} = 10 \text{ m/s}^2.$$

ÉNONCÉ

❸ Montrer que les deux vitesses calculées précédemment sont les vitesses de S à deux instants t_1 et t_2 que l'on définira avec précision. En déduire que le calcul fait au ❷ n'introduit en fait aucune approximation (on appellera t_M, t'_M, t_N t'_N les instants d'inscription de M, M′, N, N′).

CONSEIL

Utiliser l'équation horaire en considérant le départ pour les origines.

CORRIGÉ

● *Le départ du cylindre définit les origines de temps et d'espace. Ecrivons l'équation horaire :*

$$x = \frac{1}{2} gt^2 \quad \textit{d'où la vitesse à l'instant } t : v = gt.$$

● *En* M. $x_M = \frac{1}{2} gt^2_M$, *en* M′ $x'_M = \frac{1}{2} gt'^2_M$ *d'où*

$$\Delta x = O'M' - OM = x'_M - x_M = \frac{1}{2} g(t'^2_M - t^2_M) = \frac{1}{2} g(t'_M + t_M).\ \Delta t$$

$\Delta t = t'_M - t_M = 1/200$ s

● *Nous avons écrit au* ❷ $v_M = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ *soit* $v_M = g \frac{t'_M + t_M}{2}$

On voit que c'est la vitesse à l'instant $t_1 = \frac{t'_M + t_M}{2}$

C'est à la mi-temps de l'inscription de MM′ ; *de même* v_N *est la vitesse à la mi-temps* t_2 *de l'inscription de* NN′.

● *Nous avons écrit au* ❷ $g = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_N - v_M}{\Delta t}$, Δt *est en fait égal à* $t_2 - t_1$, *comme* $t_2 - t_1 = \theta$, *le calcul de* g *s'est donc fait sans approximation.*

Cinématique des Mouvements curvilignes — Pb 6

■ **Conseils généraux**

Voir tableau de cinématique.

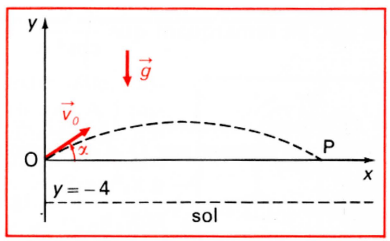
---

n° 27. Un dispositif permet de lancer une bille à la vitesse $v_0 = 16$ m/s. La bille part d'un point O, situé à 4 m au-dessus du sol. On rapportera le mouvement de la bille à deux axes : $\vec{Ox}$ horizontal, $\vec{Oy}$ vertical ascendant. Soit α l'angle $(\vec{Ox}, \vec{v_0})$, suivant l'orientation du dispositif de lancement, α variera de $-\pi/2$ à $\pi/2$. On prendra $g = 10$ m/s². — ÉNONCÉ

❶ Déterminer les équations horaires $x = f(t)$ et $y = g(t)$.

Ne pas oublier que la bille, une fois lancée, n'est plus soumise qu'à son poids : c'est donc un chute libre d'accélération $\vec{g}$. On déterminera $\overline{\gamma_y}$, $\overline{v_{0,y}}$ et $\overline{\gamma_x}$, $\overline{v_{0,x}}$. — CONSEIL

• *Suivant* $\vec{Ox}$, $\vec{g}$ *a pour composantes* $\bar{\gamma}_x = 0$ ($\vec{g}$ *se projette suivant un vecteur nul).*
$\vec{v_0}$ *a pour composante* $\overline{v_{0x}} = v_0 \cos \alpha$.
L'équation horaire, en prenant l'instant $t = 0$ *lorsque la bille part de* O, *est* $x = v_0 \cos \alpha . t$.



• *Suivant* $\vec{Oy}$, $\vec{g}$ *a pour mesure algébrique*
$\bar{\gamma}_y = -g$
$\vec{v_0}$ *a pour composante* $\overline{v_{0,y}} = v_0 \sin \alpha$.

On en déduit l'équation horaire $y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha . t$. — CORRIGÉ

❷ Quelle est l'équation de la trajectoire? — ÉNONCÉ

Remarquer que x et y sont évalués en fonction du paramètre t et constituent les équations paramétriques de la trajectoire. Pour obtenir l'équation cartésienne il faut éliminer t entre $x = f(t)$ et $y = g(t)$. — CONSEIL

$x = v_0 \cos \alpha . t \Longrightarrow t = \dfrac{x}{v_0 \cos \alpha}$, *reportons dans* $y \Longrightarrow y = \dfrac{-g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha$. *Nous reconnaissons l'équation d'une parabole passant par l'origine* ($\vec{v_0}$ *est d'ailleurs tangent à cette parabole en* O). — CORRIGÉ

❸ La bille recoupe $\vec{Ox}$ en P, calculer la distance OP (appelée portée sur Ox), pour quelle valeur de α est-elle maximale? — ÉNONCÉ

• P *a pour coordonnées* x *et* $y = 0$ *vérifiant l'équation de la parabole d'où*

$$0 = \frac{-g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha \Longrightarrow x = 0 \text{ à éliminer et } x = \frac{2 v_0^2}{g} \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha$$

c'est-à-dire $x = \dfrac{2 v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$: *c'est la portée demandée.* — CORRIGÉ

• *Discussion : la portée est maximale (pour* v_0 *donnée) quand* $\sin 2\alpha = 1$, *c'est-à-dire pour* $2\alpha = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$. *Dans notre exemple la portée maximale a pour valeur*

$$l = \frac{v_0^2}{g} = 25{,}6 \text{ m}.$$

ÉNONCÉ

❹ A quelle hauteur maximale au-dessus de Ox la bille monte-t-elle ?

CORRIGÉ

- 1re *solution c'est la valeur de* y *pour* $x = \dfrac{\overline{OP}}{2}$
- 2e *solution : raisonnons sur le mouvement suivant l'axe* $\overrightarrow{Oy}$

$$\Delta\left(\overline{v_y}^2\right) = -2g\Delta y.$$

Lorsque sa bille est à sa position la plus haute

$$\overline{v}_y = 0 \text{ d'où } 0 - v_0^2 \sin^2\alpha = -2gy \Longrightarrow y = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

ÉNONCÉ

❺ Soit Q un point de Ox situé entre O et P, montrer qu'il y a deux angles de tir α_1 et α_2 permettant d'atteindre Q.

CONSEIL

Ecrire que la trajectoire doit passer par Q, on en déduira une équation du 2e degré en tgα, en remarquant que $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \text{tg}^2\alpha$.

CORRIGÉ

- Q *a pour coordonnées* $(x_1 ; y_1 = 0)$. *ces coordonnées doivent vérifier l'équation de la trajectoire passant par* Q *d'où (revoir* ❷*)*

$$0 = \frac{-g x_1^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + x_1 \text{tg}\,\alpha \Longrightarrow \frac{-gx_1}{2v_0^2}(1 + \text{tg}^2\alpha) + \text{tg}\,\alpha = 0.$$

Ordonnons en $\text{tg}\,\alpha \Longrightarrow \dfrac{-gx_1}{2v_0^2}\text{tg}^2\alpha + \text{tg}\,\alpha - \dfrac{g x_1}{2v_0^2} = 0$

- $\Delta = 1 - \dfrac{g^2 x_1^2}{v_0^4}$ *la portée maximale est* $\dfrac{v_0^2}{g} = \ell$ *d'où* $\Delta = 1 - \left(\dfrac{x_1}{\ell}\right)^2$.

Comme $x_1 < \ell$ $\Delta > 0$ *il y a donc 2 racines* tg α_1 et tg α_2.

- *Le produit des racines* $\left(\dfrac{c}{a}\right) = 1 \Longrightarrow \text{tg}\,\alpha_1 . \text{tg}\,\alpha_2 = 1$; tg $\alpha_1 = \text{cotg}\,\alpha_2$, donc *les deux angles de tir pour atteindre* Q *situé sur* Ox, *sont complémentaires.*

ÉNONCÉ

❻ Soit R un point de coordonnées (x, y). A quelle condition peut-on atteindre R ? En déduire la portée maximale sur le sol.

CORRIGÉ

Comme en ❺ *les coordonnées de* R *doivent vérifier l'équation de la trajectoire. L'équation en* tg α *doit avoir des racines :* $\Delta \geqslant 0$

$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2}(1 + \text{tg}^2\alpha) + x\,\text{tg}\,\alpha \Longrightarrow \frac{gx^2\,\text{tg}^2\alpha}{2v_0^2} - x\,\text{tg}\,\alpha + \frac{(gx^2 + y)}{2v_0^2} = 0$$

$$\Delta = x^2 - 4\left(\frac{g x^2}{2v_0^2}\right)\left(\frac{g x^2}{2v_0^2} + y\right) = x^2\left[1 - \frac{g}{v_0^4}(g x^2 + 2v_0^2 y)\right]$$

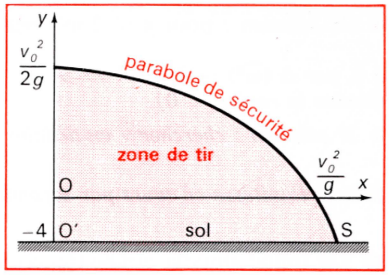
$$\Delta \geqslant 0 \Longrightarrow v_0^4 - g^2x^2 - 2gv_0^2 y \geqslant 0 \Longrightarrow y \leqslant \frac{-g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

Traçons la parabole d'équation $y = -\frac{g x^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}$

en la limitant à $-4 \leqslant y \leqslant \frac{v_0^2}{2g} = 12{,}8$ m.

A l'intérieur de cette parabole $y < -\frac{gx^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}$

(le vérifier pour l'origine).



En conclusion, à l'intérieur de la parabole, pour tout point, $\Delta > 0$ *donc il y a deux angles de tir possibles. Au contraire, il n'est pas possible d'atteindre les points extérieurs à la parabole,*

en effet Δ ***étant négatif, il est impossible de trouver un angle de tir. Pour cette raison, en balistique, cette parabole est appelée la parabole de sécurité.***

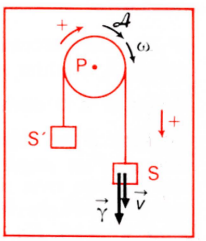
Conséquence : O′S *représente la portée maximale sur le sol : c'est l'intersection de la parabole de sécurité avec la droite* $y = -4$ *d'où* $O'S = 29{,}3$ m.

Remarquons que l'intersection avec $y = 0$ *redonne la valeur* ℓ *du* ❸.

CORRIGÉ

---

n° 28. Deux solides S et S′ sont suspendus à un fil inextensible, passant dans la gorge d'une poulie P, de rayon $r = 10$ cm. A l'instant $t = 0$, on abandonne le système à lui-même sans vitesse initiale, S est alors animé d'un mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré vers le bas d'accélération $\gamma = 1$ m/s².



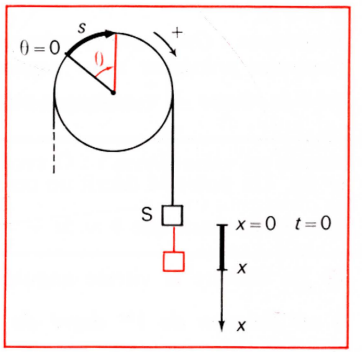
❶ Déterminer l'accélération angulaire de la poulie et l'équation horaire de son mouvement en coordonnées angulaires.

ÉNONCÉ

Repérons S *sur un axe vertical, orienté vers le bas, prenons pour origine de l'axe la position occupée par* S *à l'instant* $t = 0$.

A l'instant $t = 0$ *la poulie occupe une certaine position prise pour origine des abscisses angulaires* θ. *Le fil étant inextensible, le fil ne glissant pas dans la gorge : chaque point de la gorge se déplace de* $s = x$, *c'est-à-dire que la poulie tourne de*

$$\theta = \frac{x}{r} \quad (\theta \text{ en radians}).$$



Par dérivations par rapport au temps on en déduit

$$\overline{\omega} = \theta' = \frac{\overline{v}}{r} \text{ puis } \overline{\mathscr{A}} = \overline{\omega}' = \theta'' = \frac{\overline{\gamma}}{r}.$$

L'accélération angulaire de la poulie est donc $\overline{\mathscr{A}} = \frac{1}{0{,}1} = 10$ rd/s².

L'équation horaire de la poulie est de la forme $\theta = \frac{1}{2}\overline{\mathscr{A}}t^2 + \overline{\omega}_0 t + \theta_0$ *ce qui conduit pour ce mouvement à* $\theta = 5.t^2$ *(*θ *étant en radians).*

CORRIGÉ

❷ Quelle est la vitesse angulaire de la poulie lorsque S est descendu de 2 m. On l'exprimera en rd/s et en tours par seconde.

ÉNONCÉ

CORRIGÉ

• 1re *solution* : pour $x = 2$ m $\Longrightarrow \theta = \dfrac{2}{0{,}1} = 20$ rd. *La vitesse angulaire* $\overline{\omega}$ *est reliée à* θ, *par* $\Delta(\overline{\omega}^2) = 2\,\overline{\mathscr{A}}\Delta\theta \Longrightarrow \omega^2 = 20\,\theta$, *par suite pour* $\theta = 20$, $\omega = 20$ rd/s *(on élimine la racine* < 0*).*

• 2e *solution : chercher* $\overline{v}$ *en déduire* $\overline{\omega}$.

Soit N *la vitesse en tours par seconde* $N = \dfrac{\omega}{2\pi}$ *d'où* $N = \dfrac{20}{2\pi} \simeq 3{,}2$ tr/s.

ÉNONCÉ

❸ On freine alors la poulie (lancée à la vitesse calculée au ❷) qui s'arrête en 20 tours. Quelle est la décélération angulaire de la poulie et la durée de freinage ?

CORRIGÉ

$\Delta(\omega^2) = 2\,\overline{\mathscr{A}}\,\Delta\theta$. *Au départ* $\omega = 20$ rd/s, *à la fin* $\omega = 0$.
De plus $\Delta\theta = 20 \times 2\pi$ rd $= 40\pi$ rd, *d'où*

$$\overline{\mathscr{A}} = \frac{\Delta(\omega^2)}{2\,\Delta\theta} = \frac{-20^2}{2 \times 40\pi} = \frac{-5}{\pi} = -1{,}59 \text{ rd/s}^2.$$

Evaluons la durée Δt *de freinage :* $\dfrac{\Delta\overline{\omega}}{\Delta t} = \overline{\mathscr{A}} \Longrightarrow \Delta t = \dfrac{\Delta\overline{\omega}}{\overline{\mathscr{A}}} = \dfrac{-20}{-5/\pi} = 4\pi = 12{,}6$ s

---

ÉNONCÉ

n° 29. Un cerceau de rayon r roule sans glisser sur un plan. Soit $\vec{v}$ la vitesse de son centre θ, évaluer sa vitesse de rotation.

CONSEIL

Relier x à θ comme dans l'exercice précédent.

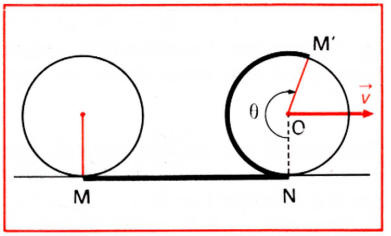
CORRIGÉ

Lorsque O *se déplace de* $x = MN$, *le cerceau tourne d'un angle* θ. *Il roule sans glisser donc*

$$MN = \overset{\frown}{M'N} \text{ (longueur de l'arc)}$$

d'où $x = r\theta$. *En dérivant par rapport au temps* $\overline{v} = r\,\overline{\omega}$.

Remarque : *On trouve la même relation que dans l'exercice précédent : par rapport à* O *(fixe) le sol a la vitesse* $-\vec{v}$ *et joue le même rôle que le fil.*



ÉNONCÉ

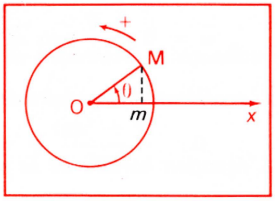
n° 30. Un point M décrit un cercle de rayon $r = 5$ cm. M est repéré par $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ (en rd). Sachant que $\theta = 5t + \dfrac{\pi}{8}$.

❶ En déduire la vitesse angulaire, la fréquence et la période du mouvement.

CORRIGÉ

θ *est fonction du* 1er *degré du temps, la vitesse angulaire* $\overline{\omega} = \theta' = 5$ rd/s. *La période est égale à* $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 1{,}26$ s,

la fréquence $N = \dfrac{1}{T} \simeq 0{,}8$ Hz.



ÉNONCÉ

❷ Quel est le mouvement de m, projection de M sur Ox ?

CORRIGÉ

$x = \overline{Om} = r\cos\theta = 5.10^{-2}\cos\left(5t + \dfrac{\pi}{8}\right)$. m *est donc animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsations* 5 rd/s *et d'amplitude* 5.10^{-2} m.

La pulsation du mouvement sinusoïdal est égale à la vitesse angulaire du mouvement circulaire uniforme : cela justifie la notation ω *pour la pulsation ou pour la vitesse angulaire.*

n° 31. Dans un repère cartésien (Ox, Oy) les équations horaires du mouvement d'un point M sont

$$\begin{cases} x = r\cos\omega t \\ y = r\sin\omega t. \end{cases}$$

ÉNONCÉ

❶ Quelle est l'équation de la trajectoire dans ce système d'axes?

CONSEIL

Pour éliminer t, exprimer $\cos\omega t$ et $\sin\omega t$ et reporter dans $\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$.

CORRIGÉ

$$\cos\omega t = \frac{x}{r}\ ;\ \sin\omega t = \frac{y}{r} \Longrightarrow \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 = r^2.$$

C'est l'équation d'un cercle de centre O, *de rayon* r.

ÉNONCÉ

❷ Quel est le module de la vitesse? Montrer que $\vec{v}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$. Quelle est la nature du mouvement?

CORRIGÉ

- $\vec{v}\begin{cases} \bar{v}_x = -r\omega\sin\omega t \\ \bar{v}_y = r\omega\cos\omega t \end{cases} \Longrightarrow v^2 = v_x^2 + v_y^2 = r^2\omega^2 \Longrightarrow v = r\omega,$

le module de la vitesse est constant.

- *Montrons que* $\vec{v}$ *est* $\perp$ *à* $\overrightarrow{OM}$, *pour cela montrons que* $\vec{v}.\overrightarrow{OM} = 0$

$$\vec{v}.\overrightarrow{OM} = \bar{v}_x.x + \bar{v}_y.y = -r^2\omega\sin\omega t\cos\omega t + r^2\omega\sin\omega t\cos\omega t = 0$$

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ *est donc tangent à la trajectoire.*

- *En résumé le module de la vitesse est constant,* $\vec{v}$ *ne peut changer de sens puisque ses composantes sont fonctions continues du temps : le mouvement est donc circulaire uniforme.*

ÉNONCÉ

❸ Déterminer le vecteur accélération.

CORRIGÉ

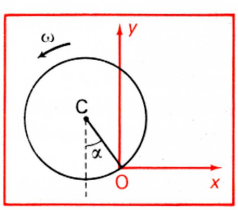
$$\vec{\gamma}\begin{cases} \bar{\gamma}_x = -r\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x \\ \bar{\gamma}_y = -r\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y \end{cases}$$ *le vecteur* $\overrightarrow{OM}$ *a pour composantes* $\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$

d'où $\vec{\gamma} = -\omega^2\overrightarrow{OM} = \omega^2\overrightarrow{MO}$, $\vec{\gamma}$ *est donc dirigé de* M *vers* O : *l'accélération est centripète de module constant* $\omega^2 r$.

---

n° 31 *bis.*

A) Une fronde de longueur $\ell = 0{,}6$ m, tourne à la vitesse constante $\omega = 25$ rd/s. Le fil reste dans un plan vertical. La pierre est lâchée en O tel que CO fasse un angle α avec la verticale descendante (α est tel que $\cos\alpha = 0{,}6$; $\sin\alpha = 0{,}8$). On rapportera le mouvement de la pierre aux axes (Ox, Oy).



ÉNONCÉ

❶ Quelles sont les caractéristiques du vecteur vitesse initiale $\vec{v_0}$?

CORRIGÉ

- $\vec{v_0}$ *est perpendiculaire à* CO
- *Au cours de la rotation la vitesse de la pierre est :* $v_0 = l\omega = 15$ m/s.

ÉNONCÉ

❷ Quelle est l'équation de la trajectoire ? $g = 10\ m/s^2$.

RÉPONSE

Voir n° 27 ❶ *et* ❷

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + \text{tg}\alpha x \qquad y = 6{,}17.10^{-2}\, x^2 + 1{,}33x$$

ÉNONCÉ

❸ Quelle est la portée sur Ox ?

RÉPONSE

Voir n° 27 ❸

$$x = 2\frac{v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha = 21{,}6\ m$$

ÉNONCÉ

❹ Quelle est la hauteur maximale atteinte au-dessus de l'axe des x ?

RÉPONSE

Voir n° 27 ❹

$$y = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 7{,}2\ m$$

ÉNONCÉ

❺ Quelle est la vitesse de la pierre une seconde après le départ ?

CORRIGÉ

Reprenons les composantes du vecteur vitesse :

$$\vec{v} \begin{vmatrix} \bar{v}_x = v_0 \cos\alpha \\ \bar{v}_y = -gt + v_0 \sin\alpha \end{vmatrix}$$

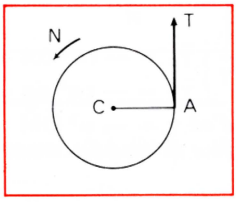
d'où $$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 - 2\, v_0 g \sin\alpha . t + g^2 t^2$$

Numériquement : $v^2 = 85$ $\quad v = 9{,}2$ m/s
La vitesse a diminué, la pierre est en phase ascendante, retardée.

Remarque : Le mouvement n'est pas uniformément varié, $\frac{d\bar{v}}{dt}$ n'est pas constant.

ÉNONCÉ

B) La fronde est maintenant chargée de deux pierres. Elle tourne, dans un plan vertical, à la vitesse constante N tr/s. En passant par le point A (tel que CA soit horizontal), l'une des pierres part suivant $\overrightarrow{AT}$ vertical, l'autre continue à tourner à N tr/s. Pour quelles valeurs de N les deux pierres reviennent se heurter (en A)?



CORRIGÉ

● *Le départ vers le haut définit les origines de temps et d'espace. Ecrivons l'équation horaire du mouvement de la pierre lâchée :*

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + vt$$

Lorsqu'elle est revenue en A : $0 = -\frac{1}{2}gt^2 + vt \Longrightarrow t = \frac{2v}{g}$ *(la solution* $t = 0$ *est à rejeter).*

● *Pendant ce temps l'autre pierre doit accomplir un nombre entier,* k, *de tours pour qu'il y ait rencontre :* $kT = t$ *avec* $T = 1/N$.

● *Nous en déduisons :* $\frac{2v}{g} = \frac{k}{N}$ *mais* $v = \ell\omega = \ell . 2\pi N$

d'où $$N^2 = \frac{g}{4\pi\ell} k \qquad N = 1{,}15\sqrt{k} \qquad k \in \{1, 2, 3...\}$$

Contrôles

Pb 1 à Pb 6

Contrôle n° 1. Un fil a pour résistance R à θ °C. La résistivité du fil varie avec la température a selon $\rho = \rho_0 (1 + a\theta)$: a est le coefficient de température. On désignera par λ le coefficient de dilatation du métal. Calculer la variation de résistance lorsque la température varie de $\Delta\theta$.

Contrôle n° 2. Un coureur parcourt 100 m en 11,50 s. Calculer sa vitesse moyenne. Quelle est l'incertitude relative sur la durée, sur la longueur, sur la vitesse ?

Contrôle n° 3. Une voiture partant à vitesse nulle arrive à 108 km/h en 500 m. Quelle est son accélération moyenne. La vitesse est déterminée à 5 % près, la distance à 10 m près. En déduire l'incertitude absolue sur γ.

Contrôle n° 4. Un mobile décrit une circonférence de rayon 10 cm d'un mouvement uniforme. Dans une première expérience le mobile fait 5,10 tours/seconde. Dans une seconde expérience le mobile fait 5,12 tours/seconde. Quelle est la variation de l'accélération centripète ?

Contrôle n° 5. On mesure la densité d'un solide par double pesée, la densité est donnée par $d = \dfrac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1}$, pour les masses on trouve les résultats suivants :

$m_1 = 5$ g ; $m_2 = 10$ g ; $m_3 = 7$ g. Chaque pesée a été faite à 5 cg près.

a) Les erreurs sur le dénominateur et le numérateur sont-elles indépendantes ?

b) Les incertitudes sur m_1, m_2, m_3 sont égales, est-ce que cela signifie que les erreurs sur m_1, m_2, m_3 sont égales ?

c) Relier l'erreur sur d aux erreurs sur m_1, m_2, m_3.

d) En déduire l'incertitude relative sur d.

Contrôle n° 6. Un cycliste fait un kilomètre, départ arrêté, en 90 secondes. Au bout de 100 m qu'il parcourt d'un mouvement uniformément accéléré, le cycliste atteint une certaine vitesse qu'il gardera jusqu'à la fin. On demande l'accélération au démarrage.

Contrôle n° 7. Un obus arrive dans une plaque à la vitesse 600 m/s. Il traverse cette plaque d'épaisseur 5 cm et continue sa course à 400 m/s.

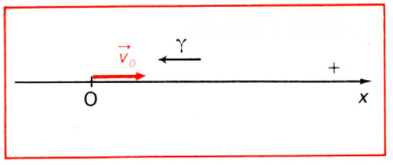
a) Quelle est la durée de traversée de la plaque ?

b) Quelle épaisseur de plaque aurait-il fallu pour arrêter l'obus ?

Contrôle n° 8. Une cage d'ascenseur dessert un puits de mine profond de 250 m. La cage a un départ uniformément accéléré sur 100 m qui l'amène à 10 m/s. Puis le mouvement est uniforme sur un parcours de 100 m. Enfin les derniers 50 m sont parcourus d'un mouvement uniformément retardé jusqu'à l'arrêt.

Représenter graphiquement l'espace parcouru et la vitesse de la cage en fonction du temps.

Contrôle n° 9. A l'instant $t = 0$, un mobile est en O, pris comme origine des espaces. Sa vitesse initiale est $v_0 = 6$ m/s, $\vec{v_0}$ dirigé dans le sens positif. L'accélération reste constante dans l'intervalle de temps [0,10 s] et égale à $\gamma = 2$ m/s², $\vec{\gamma}$ dirigé dans le sens négatif.



a) Quelle est l'équation horaire du mouvement?

b) A quel instant le mouvement change-t-il de sens?

c) Quelle est la distance parcourue entre 0 et 10 s?

d) Quelle est la vitesse du mobile à l'instant $t = 4$ s; au point $x = -7$ m.

Contrôle n° 10. Un mobile parcourt un axe ox. A l'instant $t = 3$ s il est à $x = 8$ m; à $t = 4$ s à $x = 13$ m; à $t = 5$ s à $x = 20$ m; à $t = 6$ s à $x = 29$ m; à $t = 7$ s à $x = 40$ m.

a) Montrer que le mouvement est uniformément varié, calculer l'accélération.

b) Où est le mobile aux instants $t = 2$ s, $t = 8$ s?

c) Quelle est sa vitesse à l'instant $t = 0$? A quel instant change-t-il de sens?

Contrôle n° 11. Une particule décrit un segment de longueur 2 mm d'un mouvement sinusoïdal de fréquence 100 Hertz.

a) En prenant comme origine des espaces le milieu du segment décrit, et pour origine des dates l'instant d'un passage par la position d'élongation maximale (positive), quelle est l'équation horaire du mouvement?

b) Quelle est la vitesse maximale de la particule?

c) Quelle est l'élongation de la particule à la date $t = 1{,}201$ seconde. Quelle est l'accélération à cet instant?

Contrôle n° 12. Une pierre tombe dans un puits. L'observateur entend le choc de la pierre sur le fond 3,40 s après le départ de la pierre. Sachant que le son remonte à la vitesse constante V = 340 m/s, que l'accélération de la pesanteur est $g = 9{,}8$ m/s², en déduire la profondeur du puits.

Contrôle n° 13. D'un point O situé 45 m au-dessus du sol, on lance vers le haut, verticalement, une bille à la vitesse 40 m/s.

a) Quelle est la hauteur maximale atteinte par la bille?

b) Au bout de quel intervalle de temps la bille retombe-t-elle sur le sol?

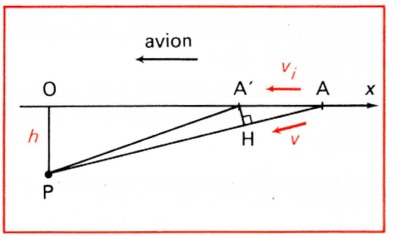
c) A quelle vitesse la bille repasse-t-elle en O?

d) Tracer le diagramme des espaces et des vitesses. On prendra $g = 10$ m/s².

Contrôle n° 14. Du plafond d'une grotte, haut de 20 mètres, partent, suivant la même verticale, 3 gouttes d'eau à la seconde. On prendra $g = 10$ m/s². Combien de gouttes peut-on voir en même temps sur cette verticale? Comment se répartissent-elles dans l'espace?

Contrôle n° 15. Une machine de Morin a un cylindre de hauteur 80 cm. Ce cylindre fait 2/3 tour pendant que la masse qui inscrit sa chute parcourt la hauteur du cylindre. Quelle est la vitesse de rotation du cylindre en tours/seconde? $g = 10$ m/s².

Contrôle n° 16. Un avion supersonique en ligne droite se rapproche d'un observateur P fixe situé à la distance $OP = h = 1\,000$ m de sa trajectoire Ox. On repérera l'avion par $\overline{OA} = x$. La vitesse V du son dans les conditions de l'expérience (ce qu'on appelle le mach) est $\frac{1\,000}{3}$ m/s.



A) Recherchons la vitesse idéale v_i que devrait avoir l'avion pour que tous les sons émis par l'avion dans la direction de P, arrivent en P en même temps.

a) Considérer un déplacement (de l'avion) infiniment petit AA'. Ecrire que le son émis en A vers P doit arriver en H lorsque l'avion arrive en A' (dans ces conditions le son arrivé en H mettra le même temps pour aller en P que le son émis en A' car $A'P \simeq PH$). On en déduira la loi de vitesse idéale $v_i = \dfrac{V\sqrt{x^2 + h^2}}{x}$.

b) Représenter sur papier millimétré le graphe de cette fonction $x \in [0,3000]$.

B) En fait l'avion a un mouvement uniformément accéléré, la loi de vitesse réelle est $v^2 = -\frac{10^3}{12}x + \frac{11 \cdot 10^6}{36}x \in [800, 3000]$. Représenter le graphe de cette fonction dans le même système d'axes que précédemment. Les deux courbes se coupent en deux points B_1 et B_2 dont on déterminera graphiquement les abscisses. Pendant une faible durée, au voisinage des instants définis par B_1 et B_2, la vitesse réelle est voisine de la vitesse idéale : l'observateur P entendra deux renforcements du son ou *bangs*. Quel intervalle de temps sépare les perceptions de ces deux bangs ?

Contrôle n° 17. Un gravier est projeté par le pneu d'un camion avec une vitesse $\vec{v_0}$ (par rapport au sol). On supposera que le gravier part du sol. $\vec{v_0}$ fait avec le sol l'angle α tel que $\cos\alpha = 0{,}8$ ($\Longrightarrow \sin\alpha = 0{,}6$). On prendra $v_0 = 10$ m/s et $g = 10$ m/s^2.

a) Déterminer l'altitude maximale du gravier au cours de son mouvement.

b) Une voiture roule derrière le camion à la vitesse constante 108 km/h. Elle est à 38 m du camion au moment de la projection du gravier. Le gravier rencontre le pare-brise, quelle a été la durée de son mouvement ?

c) Quelle est la vitesse du gravier par rapport au pare-brise au moment du choc ?

d) A quelle hauteur le choc se fait-il sur le pare-brise ?

Contrôle n° 18. Un disque comporte à sa périphérie 10 ouvertures régulièrement réparties. Il tourne devant l'objectif d'un appareil photographique, qu'il démasque périodiquement. Sa vitesse est $N = 5$ tr/s.

a) Déterminer l'intervalle de temps θ qui sépare deux prises de vues successives.

b) On photographie, à l'aide de ce dispositif, une bille tombant, en chute libre, sans vitesse initiale; on obtient les images *a*, *b*, *c*

$$ab = 1{,}96 \text{ mm} \qquad bc = 3{,}92 \text{ mm}.$$

La distance de l'objectif à la trajectoire est $l = 40$ cm, la distance du film à l'objectif $d = 20$ cm. Calculer l'accélération de la pesanteur.

c) Les incertitudes sur les mesures sont :

$\Delta N = 0{,}05$ tr/s $\quad \Delta l = \Delta d = 1$ mm $\quad \Delta(ab) = \Delta(bc) = \frac{1}{100}$ mm. Quelle est la précision de cette détermination de g ?

d) Quelle est la vitesse de la bille lors de l'enregistrement de *a*? Combien de temps avant l'enregistrement de *a*, la bille a-t-elle été lâchée? Quelle distance a-t-elle parcourue jusqu'à la première prise de vue?

e) Le disque démasque l'objectif pendant l'intervalle de temps $\tau = 10^{-3}$ s. Montrer que *a*, *b*, *c* sont des taches dont les longueurs forment une progression arithmétique, dont on déterminera la raison.

Contrôle n° 19. On lance une pierre verticalement vers le haut avec une vitesse initiale égale à 30 m/s. Une seconde après on lance une autre pierre sur la même verticale, vers le haut, à la vitesse initiale 40 m/s. Quand et où aura lieu le choc? $g = 10$ m/s².

Contrôle n° 20.

A) Un avion, en vol horizontal, à l'altitude 2 000 m, lâche une bombe en passant à la verticale d'un point P. On supposera le sol plan et horizontal. L'avion a une vitesse de 720 km/h qu'il maintient constante même après le lâcher de la bombe. On prendra $g \simeq 10$ m/s².

a) Quelle est la trajectoire de la bombe? On déterminera son équation.

b) Au bout de combien de temps la bombe touche-t-elle le sol?

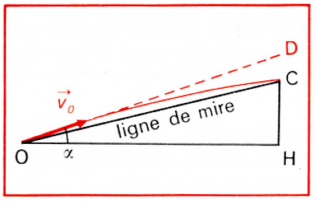
c) A quelle distance de P tombe-t-elle?

d) Quelle est la vitesse de la bombe en arrivant au sol, et sous quel angle par rapport à la verticale heurte-t-elle le sol?

e) Où se trouve l'avion quand la bombe touche le sol?

B) L'avion, en vol piqué, faisant avec la verticale un angle de 11°, lâche la bombe à l'altitude 1 356 m. Sa vitesse est encore 720 km/h.
Répondre de nouveau aux questions *a*, *b*, *c*. On donne sin 11° = 0,19; cos 11° = 0,98.

Contrôle n° 21. Un fusil envoie une balle dans le centre C d'une cible situé à CH = 3,15 m du sol et à OH = 80 m du départ. La vitesse de départ de la balle est $v_0 = 800$ m/s.



a) Exercice préliminaire : montrer en utilisant les formules d'approximation que $\sqrt{800^2 - 64} = 800\left(1 - \frac{10^{-4}}{2}\right)$.

b) Calculer la tangente de l'angle entre $\vec{v_0}$ et OH (on ne considère que le tir le plus tendu). En déduire la distance CD (D, intersection du support de $\vec{v_0}$, c'est-à-dire de l'axe du canon du fusil, avec la cible). $g = 10$ m/s².

Principe fondamental de la dynamique

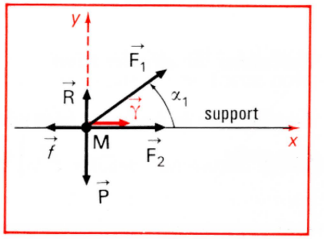
Pb 7

Conseils généraux

La relation fondamentale $\Sigma\vec{F} = m\vec{\gamma}$ est une égalité vectorielle. Supposons que toutes les forces agissant sur le point matériel soient dans un même plan.

❶ *Méthode générale.* On projette l'égalité vectorielle sur deux axes convenablement choisis.

Ainsi avec l'exemple cité, projetons



- sur $\overrightarrow{Mx}$:

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \vec{P} + \vec{f} + \vec{R} = m\vec{\gamma}$$

si nous mesurons algébriquement les composantes sur $\overrightarrow{Mx}$, nous obtenons :

$$F_1 \cos\alpha_1 + \overline{F_2} + 0 + \overline{f} + 0 = m\overline{\gamma} \qquad (1)$$

$$\left(\alpha_1 = [\overrightarrow{0x}, \overrightarrow{F_1}]\right).$$

Si nous considérons les modules des composantes nous obtenons : $F_1 \cos\alpha_1 + F_2 - f = m\gamma$. (2)
Par la suite nous ferons surtout l'exploitation des modules (2).

- sur $\overrightarrow{My}$:

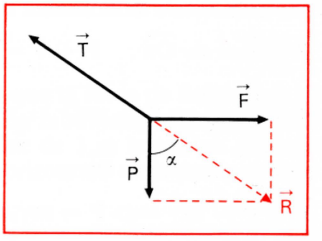
$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \vec{P} + \vec{f} + \vec{R} = m\vec{\gamma} \Longrightarrow F_1 \sin\alpha_1 + 0 + \overline{P} + 0 + \overline{R} = 0$$

$$\Longrightarrow F_1 \sin\alpha_1 - P + R = 0 \qquad (3)$$

Remarque.

Si le mobile M doit rester sur le support Mx, la condition (3) est automatiquement satisfaite, le support donnant la réaction $\vec{R}$ nécessaire. Pour de tels cas il suffira de projeter l'égalité vectorielle sur un axe parallèle au support (ici $\overrightarrow{Mx}$).

❷ *Méthode particulière.* Soit l'égalité $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_3}$ et si de plus deux des trois vecteurs sont perpendiculaires, au lieu d'exploiter deux projections on pourra composer les deux vecteurs perpendiculaires et comparer le troisième à la résultante.
Ainsi avec l'exemple cité :



$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{T} = -(\vec{P} + \vec{F}) = -\vec{R}.$$

En particulier : $T = R = \sqrt{P^2 + F^2}$ et $\text{tg}\alpha = \dfrac{F}{P}$.

---

n° 32. Le canon d'un fusil, de longueur $l = 80$ cm, tire une balle de masse $m = 20$ g. La vitesse à la sortie du canon est $v = 800$ m/s.

❶ En supposant constante la force pressante $\vec{F}$, exercée par les gaz de l'explosion, déterminer F. (On négligera les forces de frottement.)

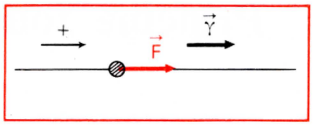
ÉNONCÉ

Tant que la balle est soumise à $\vec{F}$, on peut négliger devant $\vec{F}$ son poids $\vec{p}$. Montrer que le mouvement est uniformément varié, en déduire γ puis F.

CONSEIL

CORRIGÉ

La poussée des gaz, F, est très supérieure au poids de la balle et aux réactions du canon. Elle communique à la balle une accélération $\vec{\gamma}$*, telle que :*



$$\vec{F} = m\vec{\gamma} \Longrightarrow F = m\gamma.$$

L'accélération est donc constante, le mouvement uniformément varié. Evaluons γ *:*

$$\Delta(v^2) = 2\bar{\gamma} \cdot \Delta x$$

$\Delta x = 0{,}8$ m $\qquad 800^2 - 0 = 2 \cdot \bar{\gamma} \cdot 0{,}8 \Longrightarrow \bar{\gamma} = 4 \cdot 10^5$ m/s²

d'où $\qquad F = 2.10^{-2}.4.10^5 = 8.10^3$ N

ÉNONCÉ

❷ La balle, lancée à la vitesse 800 m/s, traverse une plaque de bois d'épaisseur 5 cm. Elle ressort de cette plaque avec une vitesse égale à 100 m/s. Quelle est l'intensité de la force résistante $\vec{R}$. La traversée de la plaque est uniformément retardée.

CORRIGÉ

Calculons la décélération : $\Delta(v^2) = 2\bar{\gamma}\Delta x \Longrightarrow \bar{\gamma} = \dfrac{100^2 - 800^2}{2 \times 5 \cdot 10^{-2}} = -6{,}3.10^6$ m/s²

Le poids de la balle est bien sûr négligeable devant $\vec{R}$*, d'où* $\vec{R} = m\vec{\gamma} \Longrightarrow R = m\gamma$.

Par suite $\qquad R = 2.10^{-2} \times 6{,}3.10^6 = 1{,}26.10^5$ N.

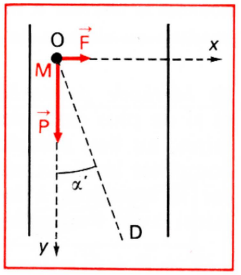
ÉNONCÉ

n° 33. Soit un condensateur à air dont les armatures planes sont verticales. On place en un point O, sans vitesse initiale, une petite boule électrisée M. La force électrique $\vec{F}$ a une intensité égale au tiers de l'intensité du poids $\vec{P}$ de la boule. On donne $g = 10$ m/s².

❶ Quelle est l'accélération de M suivant $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$.

CORRIGÉ

La boule est soumise à deux forces $\vec{F}$ *et* $\vec{P}$ *d'intensités constantes. Elle prend une accélération* $\vec{\gamma}$ *telle que* $\vec{F} + \vec{P} = m\vec{\gamma}$*, en désignant par* m *la masse de la boule.*



Projetons sur $\overrightarrow{Ox}$ *:* $\qquad F + 0 = m\gamma_x \qquad F = \dfrac{P}{3} = \dfrac{mg}{3}$

d'où $\qquad \dfrac{mg}{3} = m\gamma_x \Longrightarrow \gamma_x = \dfrac{g}{3} = 3{,}33$ m/s².

Par projection sur $\overrightarrow{Oy}$ *:*

$\vec{F} + \vec{P} = m\vec{\gamma} \Longrightarrow P = m\gamma_y \Longrightarrow \gamma_y = g = 10$ m/s².

ÉNONCÉ

❷ Quelle est la trajectoire de M ?

CONSEIL

Chercher les équations horaires $x = f(t)$ et $y = g(t)$ et éliminer t entre x et y.

RÉPONSE

$x = \dfrac{10}{6}t^2$ *et* $y = 5t^2 \qquad$ *d'où* $\qquad y = 3x.$

La trajectoire est une droite D.

Théorème du centre de gravité

Pb 8

■ Conseils généraux

Il faut définir avec précision le système à étudier, ce qui permet de faire le bilan des forces extérieures agissant sur le système.
Pour un système en mouvement complexe, le théorème du centre de gravité (ou centre d'inertie) ne détermine que l'accélération $\overrightarrow{\gamma_G}$ de G. Pour un système en translation, il permet de déterminer l'accélération du système.

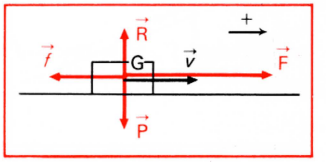
ÉNONCÉ

n° 34. Une automobile a une masse totale de 1 tonne. La résistance opposée à l'avancement due aux frottements solides et à la résistance de l'air équivaut à une force constante égale à 500 N.

❶ La voiture roule en ligne droite sur une route horizontale à vitesse constante. Quelle est l'intensité de la force motrice $\vec{F}$?

CORRIGÉ

Le mouvement est rectiligne uniforme donc $\vec{\gamma} = \vec{0}$.



La voiture est soumise à son poids $\vec{P}$, *à la force de traction* $\vec{F}$, *à la réaction du sol* $\vec{R}$, *à la force résistante* $\vec{f}$.
D'après le théorème du centre de gravité :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f} = m\vec{\gamma} = \vec{0}.$$

Projetons sur l'horizontale $0 + 0 + F - f = 0 \Longrightarrow F = f = 500$ N.

ÉNONCÉ

❷ En un point O du parcours, à l'instant $t = 0$, la voiture aborde, à la vitesse $v_0 = 72$ km/h, une côte à 3 %. Le chauffeur débraye en O, c'est-à-dire supprime l'action du moteur à partir de O. Au bout de combien de temps l'automobile s'arrêtera-t-elle ? $g = 10$ m/s².

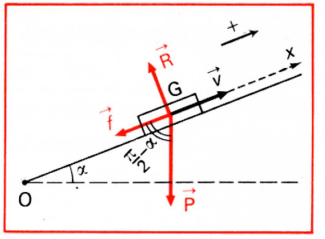
CONSEIL

Dans un problème, sauf précision de l'énoncé, on admet que la force de frottement est constante et est toujours présente quand le système est en mouvement. Quand on dit que la pente d'une côte est 3 % cela signifie qu'on s'élève de 3 m lorsqu'on parcourt 100 m sur la route, si α est l'angle de la route avec l'horizontale $\Longrightarrow$ pente = sin α.

CORRIGÉ

● *D'après le théorème du centre de gravité, la voiture étant soumise aux trois forces extérieures* $\vec{P}$, $\vec{R}$, $\vec{f}$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{\gamma}.$$



Projetons sur $\overrightarrow{Gx}$. *A priori on ne connait pas le sens de* $\vec{\gamma}$, *soit* $\bar{\gamma}$ *sa mesure algébrique sur* $\overrightarrow{Gx}$.

d'où $-P\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 0 - f = m\bar{\gamma}$,

$m\bar{\gamma} = -mg\sin\alpha - f \Longrightarrow \bar{\gamma} = -0{,}8$ m/s².

Le vecteur $\vec{\gamma}$ *est donc de sens opposé à* $\overrightarrow{Gx}$, *son module est constant.*

CORRIGÉ

● *La vitesse en* O *est* $\overline{v_0} = 72$ km/h $= 20$ m/s. *La voiture s'arrête* Δt *secondes après d'où*

$$\frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \bar{\gamma} \Longrightarrow \Delta t = \frac{\Delta \bar{v}}{\bar{\gamma}}$$

$$\Delta t = \frac{0 - v_0}{-0{,}8} = \frac{20}{0{,}8} = 25 \text{ s.}$$

ÉNONCÉ

❸ L'automobile roulant à 72 km/h sur une route horizontale, on freine pour l'arrêter. La voiture s'arrête sur 100 m. Déterminer l'intensité de la force de freinage.

CONSEIL

Quand on freine, on admet que le moteur est débrayé. En réalité le chauffeur rétrograde et le moteur par « frein moteur » participe au freinage.

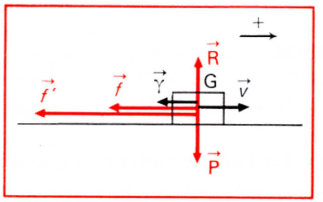
CORRIGÉ

● *Soit* $\vec{f}'$ *la force de freinage.* $\vec{\gamma}$ *est de sens opposé à* $\vec{v}$.

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f}' + \vec{f} = m\vec{\gamma}.$$

Projetons sur l'horizontale

$$0 + 0 - f' - f = -m\gamma \Longrightarrow f' = m\gamma - f.$$



● *Calculons* γ. *Nous supposons le mouvement uniformément décéléré d'où*

$$\Delta(v^2) = 2\bar{\gamma}\Delta x \Longrightarrow 0 - v_0^2 = 2\bar{\gamma}\Delta x.$$

Par suite $\bar{\gamma} = -2 \text{ m/s}^2 \Longrightarrow \gamma = 2 \text{ m/s}^2$.

● *Calculons* f'. $f' = m\gamma - f = 1\,000 \times 2 - 500 = 1\,500$ N.

ÉNONCÉ

n° 35. Un solide de masse $m = 10$ kg, posé sur un plan incliné de 30° par rapport à l'horizontale, est lancé avec une vitesse $v_0 = 14$ m/s, vers le haut. Au bout de combien de temps revient-il à son point de départ?

❶ On supposera les frottements négligeables. $g = 10 \text{ m/s}^2$

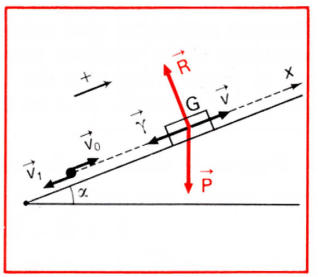
CORRIGÉ

Sous l'action de $\vec{P}$ *et* $\vec{R}$, *le solide prend une accélération* $\vec{\gamma}$ *telle que* $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{\gamma}$.

Projetons sur $\overrightarrow{Gx}$, *et considérons la mesure algébrique* $\bar{\gamma}$ *de* $\vec{\gamma}$ *sur* $\overrightarrow{Gx} \Longrightarrow -P \sin\alpha = m\bar{\gamma} \Longrightarrow \bar{\gamma} = -g \sin\alpha$, *Le mouvement d'aller et retour a pour accélération* $\bar{\gamma} = -5 \text{ m/s}^2$.

Pour le passage aller $\overline{v_0} = +14$ m/s, *pour le passage retour du mouvement uniformément varié* $\overline{v_1} = -14$ m/s *d'où* $\Delta\bar{v} = \overline{v_1} - \overline{v_0} = -28$ m/s; *par suite il s'écoule entre le passage aller et le passage retour* Δt *tel que*

$$\Delta t = \frac{\Delta \bar{v}}{\bar{\gamma}} = \frac{-28}{-5} = 5{,}6 \text{ s.}$$



ÉNONCÉ

❷ La résultante des forces de frottements $f = 20$ N.

CONSEIL

Prendre garde que la force de frottement $\vec{f}$ a toujours un sens opposé au vecteur vitesse $\vec{v}$, l'accélération à l'aller est donc différente de l'accélération au retour.

● *Etude de l'aller. La force de frottement est de sens opposé à* $\overrightarrow{Gx}$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{\gamma} \text{ (figure 1).}$$

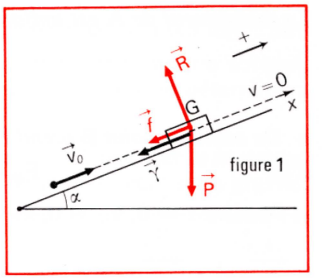


figure 1

Projetons sur $\overrightarrow{Gx}$ *:*

$$-P\sin\alpha - f = m\bar{\gamma} \Longrightarrow \bar{\gamma} = -g\sin\alpha - \frac{f}{m} = -7 \text{ m/s}^2$$

Le mouvement est uniformément retardé, jusqu'à ce que la vitesse s'annule au bout du temps Δt *tel que*

$$\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \bar{\gamma} \Longrightarrow \Delta t = \frac{0 - 14}{-7} = 2 \text{ s.}$$

Evaluons la distance parcourue à l'aller $x = \frac{1}{2}\bar{\gamma}t^2 + \bar{v_0}t = -\frac{7}{2}t^2 + 14t = 14$ m.

● *Etude du retour. La force de frottement est du sens opposé à* $\overrightarrow{Gx'}$ *(figure 2).* $\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{\gamma}$ *donne par projection sur* $\overrightarrow{Gx'}$ *:*

$$P\sin\alpha - f = m\bar{\gamma} \Longrightarrow \bar{\gamma} = g\sin\alpha - \frac{f}{m} = 3 \text{ m/s}^2.$$

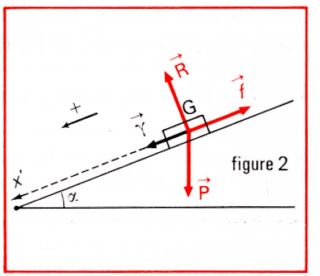


figure 2

Prenons le début de la descente pour origine des temps et la position correspondante pour origine de l'axe $\overrightarrow{Gx'}$*. L'équation horaire du mouvement de descente est*

$$x = \frac{1}{2}\bar{\gamma}t^2 = \frac{3}{2}t^2.$$

Le solide repasse par son point de départ pour $x = 14$ m,

donc au bout du temps $t = \sqrt{\frac{28}{3}} \simeq 3$ s.

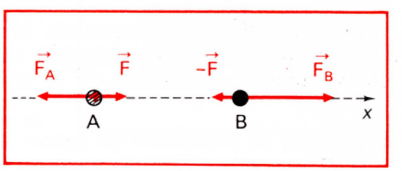
● *La durée de l'aller et retour est donc* $2 + 3 = 5$ s.

CORRIGÉ

---

n° 36.

Entre deux points A et B, de masse $m_A = 2$ kg et $m_B = 1$ kg, s'exercent des forces d'attraction d'intensité $F = 1$ N. De plus A subit une force $\overrightarrow{F_A}$, B une force $\overrightarrow{F_B}$ d'intensités : $F_A = 2$ N, $F_B = 3$ N.
A l'instant $t = 0$, A et B sont au repos et AB = 1 m.



ÉNONCÉ

❶ Ecrire les équations horaires des mouvements de A et B. En déduire celle du mouvement de leur centre de gravité G.

● *Prenons la position de* A *à l'instant* $t = 0$ *comme origine de l'axe* $\overrightarrow{Ax}$*.*
D'après le principe fondamental de la dynamique A *prend l'accélération* $\vec{\gamma}_A$ *de mesure algébrique sur* $\overrightarrow{Ax}$ $\bar{\gamma}_A$ *telle que*

$$\vec{F_A} + \vec{F} = m_A\vec{\gamma}_A$$

$$\Longrightarrow -F_A + F = m_A\bar{\gamma}_A \Longrightarrow \bar{\gamma}_A = -\frac{1}{2} \text{ m/s}^2.$$

CORRIGÉ

Le mouvement de A *est uniformément varié, à l'instant* $t = 0$ $v_A = 0$ et $x_A = 0$,

d'où $$x_A = \frac{1}{2}\bar{\gamma}_A t^2 = -\frac{1}{4}t^2$$

- *De même le point* B *prend l'accélération* $\bar{\gamma}_B$ *telle que* $\vec{F_B} - \vec{F} = m_B \vec{\gamma_B}$,

d'où $$F_B - F = m_B\bar{\gamma}_B \Longrightarrow \bar{\gamma}_B = 2\ m/s^2.$$

CORRIGÉ

A l'instant $t = 0$, $v_B = 0$, $x_B = 1\ m$, *d'où l'équation horaire* $x_B = \frac{1}{2}\bar{\gamma}_B t^2 + x_0 = t^2 + 1$.

- *Soit* G *le centre de gravité :* $(m_A + m_B)\,\vec{OG} = m_A\,\vec{OA} + m_B\vec{OB}$

$$(m_A + m_B)\,x_G = m_A\,x_A + m_B\,x_B$$

d'où $$x_G = \frac{2}{3}x_A + \frac{1}{3}x_B = \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{3}.$$

ÉNONCÉ

❷ Montrer que le résultat obtenu confirme le théorème du centre de gravité.

CORRIGÉ

Considérons le système déformable (A, B). *D'après le théorème du centre de gravité,* G *se déplace comme un point matériel de masse* $(m_A + m_B)$, *où seraient appliquées les forces extérieures* $\vec{F_A}$ *et* $\vec{F_B}$ ($\vec{F}$ *et* $-\vec{F}$ *sont des forces attractives intérieures*).

Par suite $\vec{F_A} + \vec{F_B} = (m_A + m_B)\,\vec{\gamma_G} \Longrightarrow -F_A + F_B = (m_A + m_B)\,\bar{\gamma}_G \Longrightarrow \bar{\gamma}_G = \frac{1}{3}\ m/s^2$.

A l'instant $t = 0$, $v_G = 0$, $x_G = \frac{2}{3}x_A + \frac{1}{3}x_B = \frac{1}{3}$ m *d'où* $x_G = \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{3}$.

---

n° 37. Une locomotive de masse M = 100 tonnes remorque cinq wagons, chacun a une masse m égale à 20 tonnes. Les résistances dues aux frottements sont évaluées à 500 N par tonne en mouvement.

ÉNONCÉ

❶ Lancé à la vitesse $v_0 = 144$ km/h, le train aborde une côte de pente 1 %. Après 6 km de montée, sa vitesse est $v_1 = 72$ km/h. Calculer la force motrice développée par la locomotive. $g = 10\ m/s^2$.

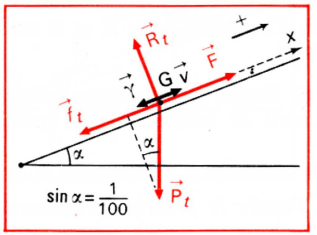
CONSEIL

L'énoncé parle de la vitesse du train, ce qui signifie qu'on considère le train comme étant en translation. Le théorème du centre de gravité appliqué à l'ensemble du train donne donc l'accélération de ce train.

- *Prenons la trajectoire du centre de gravité du train, orienté dans le sens* $\vec{Gx}$, *comme axe.*

$v_0 = 40\ m/s$ $\quad v_1 = 20\ m/s$ $\quad \Delta x = 6\,000\ m$,

d'où $$\bar{\gamma} = \frac{\Delta(v^2)}{2\,\Delta x} = \frac{20^2 - 40^2}{2 \times 6\,000} = -\frac{1}{10}\ m/s^2.$$



CORRIGÉ

- *Soient* $\vec{f_t}$ *la force résistante sur l'ensemble du train,* $\vec{P_t}$ *le poids total du train,* $\vec{R_t}$ *la réaction des rails,* M_t *la masse totale du train.*

$$\vec{P_t} + \vec{R_t} + \vec{F} + \vec{f_t} = M_t\,\vec{\gamma}$$

En projetant sur $\vec{Gx}$

$$-P_t \sin\alpha + F - f_t = M_t\,\bar{\gamma} \Longrightarrow F = f_t + P_t \sin\alpha + M_t\,\bar{\gamma} = 10^5\ N$$

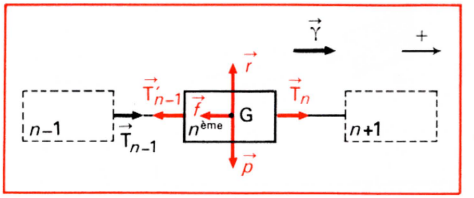
ÉNONCÉ

❷ Au cours du démarrage, sur le plat, le train a une accélération égale à 0,5 m/s². Soit $\vec{T}$ la force de traction exercée par un wagon (ou la locomotive) sur le wagon suivant. Montrer que les cinq valeurs de T forment une suite arithmétique dont on déterminera la raison.

CONSEIL

Numéroter les wagons de 1 à 5 en commençant par le dernier. Considérer le n^e wagon en tant que système matériel. Appliquer à ce système le théorème du centre de gravité.

CORRIGÉ



● *Considérons le* n^e *wagon, le* $(n+1)^e$ *wagon exerce sur lui la force de traction* $\vec{T}_n$. *Le* n^e *wagon tire le* $(n-1)^e$ *avec une force* $\vec{T}_{n-1}$, *d'après le principe de l'action et de la réaction, le* $(n-1)^e$ *wagon tire le* n^e *(qui nous intéresse) avec une force* $\vec{T}'_{n-1}$ *égale en module à* T_{n-1}.

● *D'après le théorème du centre de gravité appliqué au* n^e *wagon :*

$$\vec{T}_n + \vec{T}'_{n-1} + \vec{p} + \vec{r} + \vec{f} = m\vec{\gamma},$$

en projetant sur l'horizontale $T_n - T'_{n-1} - f = m\gamma$ *comme* $T'_{n-1} = T_{n-1}$, *on en déduit* $T_n - T_{n-1} = f + m\gamma = 500 \times 20 + 20\,000 \times 0{,}5 = 20\,000$ N : *les forces de traction exercées, en commençant par la queue du train, forment donc une suite arithmétique de raison* 20 000 N.

---

n° 38. Une motocyclette et son pilote ont une masse totale $m = 200$ kg.

ÉNONCÉ

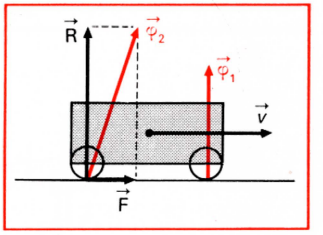
❶ En une minute, avec une accélération constante, le motocycliste a atteint la vitesse $v = 72$ km/h, départ arrêté. On a représenté les forces de contact $\vec{\varphi}_1$ et $\vec{\varphi}_2$ exercées par le sol sur les pneus (la roue avant est porteuse, la roue arrière, motrice).

Décomposer $\vec{\varphi}_2$ suivant $\vec{F}$ horizontale et $\vec{R}$ verticale. Déterminer F.

CORRIGÉ

● *Calculons l'accélération de la motocyclette*

$$\bar{\gamma} = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}\ m/s^2.$$



● *Appliquons le théorème du centre de gravité, le système motocyclette-pilote est soumis à trois forces extérieures,* $\vec{\varphi}_1$, $\vec{\varphi}_2$ *et son poids* $\vec{P}$

$$\vec{\varphi}_1 + \vec{P} + \vec{\varphi}_2 = m\vec{\gamma}.$$

Projetons sur l'horizontale, et appelons $\vec{F}$ *la projection de* $\vec{\varphi}_2$

$$\Longrightarrow F = m\gamma \simeq 67 \text{ N}.$$

Remarques : — *On appelle souvent* $\vec{R}$ *la réaction du sol sur la roue arrière et* $\vec{F}$ *la force motrice « développée » par le moteur.*

— *En toute rigueur, la réaction du sol sur la roue arrière est* $\vec{\varphi}_2$, *la force* $\vec{F}$ *ne peut être une force extérieure « exercée » par le moteur puisque le moteur fait partie du système matériel motocyclette-pilote.*

ÉNONCÉ

❷ Montrer que s'il n'y a pas de frottements (sol verglacé) le démarrage est impossible.

CORRIGÉ

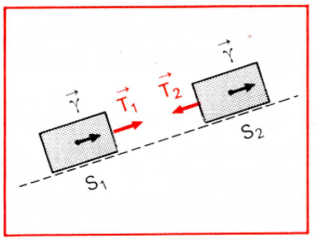
Si le sol est parfaitement glissant, les réactions ne peuvent être que perpendiculaires au sol, par suite $\vec{\varphi}_2$ *étant perpendiculaire au sol* $\vec{F} = 0$ *donc* $\vec{\gamma} = 0$: *un véhicule sur une telle route ne peut rouler qu'à vitesse constante, si* $v = 0$ *au départ* v *restera égal à zéro : le démarrage est impossible.*

Tension

Pb 9

Conseils généraux.

Le fil reliant S_1 à S_2 tire S_1 avec une force $\vec{T}_1$ et S_2 avec une force $\vec{T}_2$ de même module si le fil a une masse négligeable : ce module mesure la tension du fil.



- Pour l'ensemble S_1, S_2, $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ sont des forces intérieures qui n'interviennent pas dans le théorème du centre de gravité.
- Pour évaluer $\vec{T}_1$ il faut appliquer le théorème du centre de gravité au système S_1 : pour ce système $\vec{T}_1$ est une force extérieure intervenant dans le théorème.
- Nous admettrons pour l'instant que la tension d'un fil n'est pas modifiée si ce fil passe sur une poulie de masse négligeable, tournant sans frottement.

ÉNONCÉ

n° 39. Un solide A de masse $m = 100$ g, entraîne un solide B de masse $M = 400$ g, qui glisse sur un plan horizontal. La masse de la poulie et les frottements sont négligeables. ($g = 10$ m/s².)

❶ Evaluer l'accélération du mouvement de A.

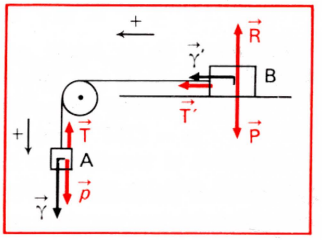
CONSEIL

Le théorème du centre de gravité appliqué à l'ensemble (A, poulie, B) conduit à une interprétation difficile (il fait d'ailleurs intervenir une force extérieure non connue a priori : la réaction de l'axe de la poulie).
On étudiera successivement A et B. On remarquera que A et B ont des accélérations de même module et subissent des tensions de même module.

CORRIGÉ

- *Le solide* A *est soumis à son poids* $\vec{p}$ *et à la traction du fil* $\vec{T}$. *D'après le théorème du centre de gravité,*

$$\vec{p} + \vec{T} = m\vec{\gamma}.$$



Projetons sur la verticale orientée vers le bas

$$p - T = m\gamma \qquad (1)$$

- *Le solide* B *est soumis à son poids* $\vec{P}$ *à la réaction du plan* $\vec{R}$ *à la traction du fil* $\vec{T}$. *Là encore*

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}' = M\vec{\gamma}' \qquad \textit{d'où} \qquad T' = M\gamma' \qquad (2)$$

- *La masse de la poulie, du fil et les frottements sont négligeables donc* $T = T'$; *le fil étant inextensible* $\gamma = \gamma'$. *Il suffit pour obtenir* γ *d'éliminer la tension du fil en ajoutant* (1) *et* (2), *ce qui conduit à*

$$p = (m + M)\gamma \implies \gamma = \frac{m}{m + M}\, g = 2 \text{ m/s}^2.$$

Le mouvement de A (*ou* B) *est donc uniformément varié.*

ÉNONCÉ

❷ Le système est abandonné sans vitesse. A touche le sol après une chute de 1 m. Quelle est la durée de cette chute ? Quelle est la tension du fil ? Quelles est la vitesse de A lors de l'arrivée au sol ?

CORRIGÉ

• *Le départ de* A *définissant les origines de temps et d'espace,* A *est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié d'équation horaire* $x = \frac{1}{2}\gamma t^2 = t^2$. *Lorsque* $x = 1$ m, $t = 1$ s. *La durée de chute est donc* 1 s.

• *La tension du fil est* $T' = M\gamma' = 0{,}4 \times 2 = 0{,}8$ N. *On remarquera que cette tension est inférieure à* p, *poids de* A : *il n'y a pas équilibre.*

• *Dérivons l'équation horaire :* $\bar{v} = \bar{\gamma}t$ *lorsque* $t = 1$ s $\quad v = 2$ m/s.

ÉNONCÉ

❸ Quel est le mouvement de B à partir du moment où A touche le sol?

CORRIGÉ

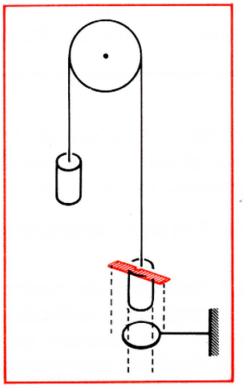
Le fil se détend : $T' = 0$, *d'après la relation* (2) $\gamma' = 0$. B *est donc animé d'un mouvement rectiligne, uniforme, vers la gauche, de vitesse* $v = 2$ m/s.

---

n° 40.

ÉNONCÉ

❶ Les deux cylindres d'une machine d'Atwood ont chacun une masse M égale à 90 g. Sur l'un deux, on place une surcharge à ailette de masse $m = 16$ g. Le dispositif est abandonné sans vitesse. Quelle est l'accélération prise par les masses? Les frottements et la masse de la poulie sont négligeables. On prendra $g = 9{,}8$ m/s².



CORRIGÉ

• *Les forces qui s'exercent sur le système masse-surcharge sont les poids* $\vec{P}$ *et* $\vec{p}$ *et la traction du fil* $\vec{T}$. *D'après le théorème du centre de gravité*

$$\vec{P} + \vec{p} + \vec{T} = (M + m)\,\vec{\gamma}$$

Projetons sur la verticale orientée vers le bas :

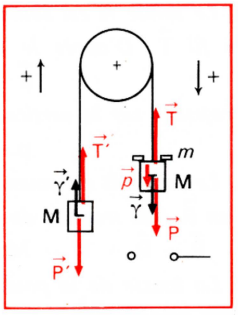
$$P + p - T = (M + m)\,\gamma \qquad (1)$$

• *De même pour l'autre masse :*

$$\vec{T'} + \vec{P'} = M\vec{\gamma'} \Longrightarrow T' - P' = M\gamma'. \qquad (2)$$

• *La masse de la poulie et les frottements sont négligeables donc* $T = T'$, *le fil est inextensible donc* $\gamma = \gamma'$, *d'autre part* $P' = P$ *(même masse* M*). Ajoutons* (1) *et* (2) *membre à membre*

$$p = (2M + m)\,\gamma \Longrightarrow \gamma = 0{,}8 \text{ m/s}^2.$$



ÉNONCÉ

❷ Après un parcours de 40 cm, le cylindre surchargé rencontre un anneau (encore appelé curseur évidé) qui retient la surcharge à ailettes. Il parcourt de nouveau 40 cm. Quelle est la durée totale du mouvement? Quelles sont les valeurs de la tension du fil?

CONSEIL

On remarquera que le dépôt de la surcharge à ailettes ne donne aucun choc au cylindre. Il n'en serait pas de même si le cylindre prenait la surcharge en remontant.

CORRIGÉ

• *Le cylindre est d'abord animé d'un mouvement uniformément varié d'accélération* γ. *Le départ définissant les origines de temps et d'espace, l'équation horaire s'écrit :*

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 = 0{,}4t^2 \qquad \textit{lorsque } x = 0{,}40 \text{ m} \qquad t = 1 \text{ s.}$$

Dérivons l'équation horaire $\bar{v} = \bar{\gamma}t = 0{,}8t$, *pour* $x = 0{,}40$ m $\quad v = 0{,}8$ m/s.

● *Ensuite il n'y a plus de surcharge, l'étude faite précédemment s'applique à condition de poser* $m = 0$; *donc* $\gamma = 0$, *le mouvement est uniforme. Le dépôt de la surcharge ne perturbant pas la vitesse du cylindre, la vitesse initiale de cette deuxième phase est* 0,8 m/s.

Cette deuxième phase dure donc $\frac{0,4}{0,8} = 0,5$ s.

Par suite la durée totale du mouvement est $1 + 0,5 = 1,5$ s.

CORRIGÉ

● *La tension du fil est donnée par la relation (2) de la première question :*

$$T' = P' + M\gamma' = M(g + \gamma').$$

Au cours de la première phase $\gamma' = 0,8$ m/s² $\Longrightarrow T' = 0,954$ N.
Au cours de la deuxième phase $\gamma' = 0 \Longrightarrow T' = Mg = 0,882$ N.
On remarquera que dans ce cas la tension est égale au poids accroché, le système passe donc par une suite d'états d'équilibre.

---

n° 41.

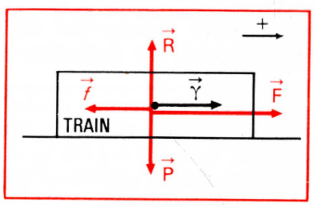
ÉNONCÉ

❶ Un train comprend une motrice de masse M = 50 t et 5 wagons, chacun a une masse *m* égale à 10 tonnes. Au cours d'un démarrage il atteint la vitesse de 144 km/h en 40 s. Déterminer la force de traction, d'intensité constante, développée par le moteur, sachant que les forces de frottements représentent 100 N par tonne en mouvement. La voie est rectiligne et horizontale.

CORRIGÉ

Le train est soumis à son poids $\vec{P}$, *à une force motrice* $\vec{F}$, *à la réaction des rails* $\vec{R}$, *à une force résistance* $\vec{f}$. *D'après le théorème du centre de gravité*

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} + \vec{f} = (M + 5\,m)\,\vec{\gamma}$$
$$\Longrightarrow F - f = (M + 5\,m)\,\gamma.$$



L'accélération est donc constante ; le mouvement uniformément accéléré, calculons γ :

$$\bar{\gamma} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{40 - 0}{40} = 1 \text{ m/s}^2.$$

D'où $F = (M + 5\,m)\,\gamma + f = 1,1.10^5$ N.

ÉNONCÉ

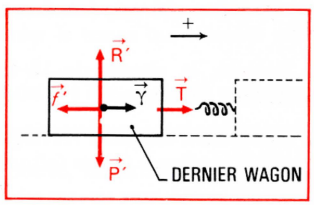
❷ Un dynamomètre est placé entre le dernier et l'avant-dernier wagon. Que mesure-t-il ? La constante de raideur du ressort étant $K = 10^5$ N/m, de combien le ressort s'allonge-t-il ? Le mouvement du train est celui qui a été étudié précédemment.

CONSEIL

Considérer le dernier wagon en tant que système matériel et appliquer le théorème du centre de gravité : pour ce wagon la tension de la barre d'attelage est une force extérieure.

CORRIGÉ

● *Le dynamomètre mesure la tension* T *de la barre d'attelage. Considérons pour évaluer cette tension, le dernier wagon. Il est soumis à la traction* $\vec{T}$, *la réaction des rails* $\vec{R}'$, *la force résistance* $\vec{f}'$, *son poids* $\vec{p}$. *D'après le théorème du centre de gravité* $\vec{T} + \vec{R}' + \vec{f}' + \vec{p} = m\vec{\gamma}$. *Projetons sur l'horizontale*



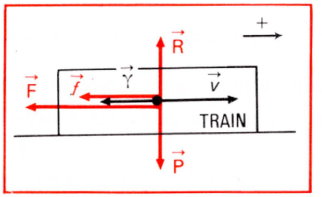
$$T - f' = m\gamma \Longrightarrow T = f' + m\gamma$$
$$= 100 \times 10 + 10^4 \times 1 = 1,1.10^4 \text{ N}.$$

● *Le ressort s'allonge de* x *tel que* $T = Kx$, *d'où* $x = \frac{1,1.10^4}{10^5} = 0,11$ m.

ÉNONCÉ

❸ Le train ralentit : le freinage s'exerce sur tous les essieux du convoi à raison de 1 900 N par tonne en mouvement. Quel est l'allongement du dynamomètre placé entre le dernier et l'avant-dernier wagon ? La voie est horizontale.

CONSEIL



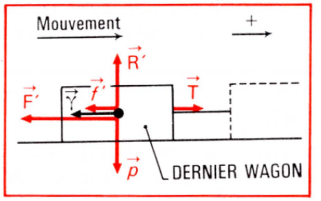
CORRIGÉ

● *Le train est soumis à son poids* $\vec{P}$, *à la réaction des rails* $\vec{R}$, *à la force résistante* $\vec{f}$, *à la force de freinage* $\vec{F}$. *D'après le théorème du centre de gravité :*

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{F} = (M + 5\,m)\,\vec{\gamma}$$

$$-f - F = -(M + 5\,m)\,\gamma$$

$$\gamma = \frac{f + F}{M + 5m} = 2\ m/s^2.$$



● *Considérons le dernier wagon :*

$$\vec{T} + \vec{R}' + \vec{f}' + \vec{F}' + \vec{p} = m\vec{\gamma}$$

$$T - f' - F' = -m\gamma \Longrightarrow T = F' + f' - m\gamma = 0$$

Le dynamomètre ne subit donc aucun allongement, la barre d'attelage ne joue aucun rôle.

ÉNONCÉ

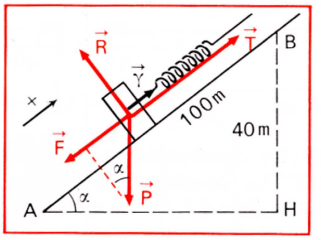
n° 42. Un skieur de masse 80 kg, gravit une pente de 40 %. Il est tiré par un remonte-pente, constitué essentiellement par un ressort de masse négligeable, de longueur à vide $l_0 = 1$ m, parallèle à la pente. Sous une tension de 100 N ce ressort s'allonge de 4 cm. Les résistances au mouvement équivalent à une force opposée à la vitesse $\vec{v}$, de module constant 80 N. $g = 10\ m/s^2$.

❶ Le skieur initialement immobile prend la vitesse de 18 km/h après 10 m de parcours. Evaluer la longueur, supposée constante, du ressort.

CORRIGÉ

● *Le skieur est soumis à son poids* $\vec{P}$, *à la traction du ressort* $\vec{T}$, *à la réaction du sol* $\vec{R}$ *et à la force résistante* $\vec{F}$: $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{\gamma}$. *Projetons sur la trajectoire :*

$$-P \sin \alpha + T - F = m\gamma \qquad (1)$$



Les forces sont constantes, l'accélération également, le mouvement est uniformément varié ; évaluons γ :

$$\Delta(v^2) = 2\bar{\gamma}\,\Delta x \Longrightarrow 5^2 - 0 = 2 \times \gamma \times 10$$

$$\Longrightarrow \gamma = 1{,}25\ m/s^2.$$

Par suite :

$$T = m\gamma + P \sin \alpha + F = 80 \times 1{,}25 + 800 \times 0{,}4 + 80 \Longrightarrow T = 500\ N$$

● *L'allongement du ressort étant proportionnel à la tension, le ressort s'allonge de* $\frac{4}{100} \times 500 = 20$ cm, *le ressort a donc* 1,20 m *de longueur.*

ÉNONCÉ

❷ Ensuite, la vitesse de 18 km/h est conservée. Quelle est la longueur, de nouveau constante, du ressort ?

CORRIGÉ

Le mouvement est alors rectiligne, uniforme, $\gamma = 0$. *L'inventaire des forces reste le même, il suffit d'appliquer* (1) *en faisant* $\gamma = 0$

$$T = P \sin \alpha + F = 400\ N.$$

Le ressort s'allonge cette fois de $\frac{4}{100} \times 400 = 16$ cm, *le ressort a donc* 1,16 m *de longueur.*

Contrôles

Contrôle n° 1. La cage d'un ascenseur, qui pèse 800 kg, doit parcourir une distance de 40 m entre le palier du rez-de-chaussée et celui du dernier étage d'un immeuble. On admet qu'elle s'élève de 25 m d'un mouvement uniformément accéléré dans lequel la vitesse s'accroît de 50 cm par seconde, puis qu'elle parcourt les 15 derniers mètres d'un mouvement uniformément retardé qui l'amène au dernier palier avec une vitesse nulle.

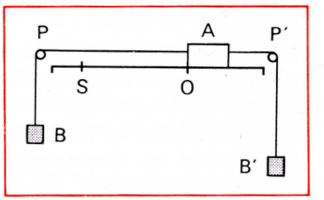
1. Calculer la vitesse maximale acquise par la cage.
2. Calculer la durée de la montée.
3. Calculer la force de traction exercée par le câble sur la cage dans chacun des deux mouvements accéléré et retardé. $g = 9{,}80$ m/s². (Bac.)

Contrôle n° 2. Un sous-marin de poche a pour volume $V = 3{,}5$ m³, sa masse $M = 5\,500$ kg. Le poids volumique de l'eau est $\omega = 10^4$ N/m³. $g = 10$ m/s².

Ce sous-marin, en plus de la poussée d'Archimède, est soumis à une force de frottement $\vec{R}$ de même direction que le vecteur vitesse $\vec{v}$, de sens opposé, de module $R = 800\,v^2$.

1. Le dispositif de propulsion et de direction étant arrêté, le sous-marin s'enfonce verticalement. Quelle est l'accélération lorsque la vitesse passe par la valeur $v = 3$ m/s ? A quelle vitesse limite constante le sous-marin arrive-t-il ?
2. Déterminer l'intensité et la direction de la force $\vec{F}$ que doit développer le dispositif de propulsion et de direction, si l'on veut que le sous-marin soit animé d'un mouvement uniforme, rectiligne et horizontal, à vitesse $v = 6$ m/s (on déterminera l'angle de $\vec{F}$ avec l'horizontale).

Contrôle n° 3. Un corps A de masse $M = 1\,660$ g peut glisser sur une longue table horizontale. Il est réuni par des fils fins à deux autres corps, l'un B de masse $m = 490$ g et l'autre B′ de masse $m' = 300$ g. On suppose que les masses des fils et des poulies P et P′ sont négligeables ainsi que les frottements. Le système abandonné à lui-même prend un mouvement uniformément accéléré.



1. Calculer l'accélération de ce mouvement.
2. Calculer les tensions T et T′ des fils AB et AB′. Calculer directement la différence de ces tensions.
3. Calculer le temps, mis par le corps A partant du repos en O pour atteindre le point S à une distance OS = 218,9 cm. Calculer aussi la vitesse instantanée du corps A à son passage en S.
4. Au moment où le corps A passe en S, le fil qui le relie au corps B casse brusquement. Décrire le mouvement ultérieur de l'ensemble des corps A et B′. Calculer le temps qui s'écoule entre le départ de A du point O et son retour au même point.
5. Calculer la tension T″ du fil AB′ après la rupture du fil reliant A à B. $g = 9{,}80$ u SI. (Bac.)

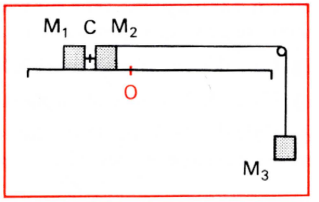
Contrôle n° 4. Aux deux extrémités d'un fil passant sur une poulie, on attache deux masses métalliques M_1 et M_2. La densité du métal est $d = 21$; chacune des masses vaut 420 g. La masse M_1 est maintenue au fond d'un tube vertical rempli de liquide de densité 0,7. La poulie a une masse négligeable.

1. Montrer que la poussée d'Archimède agissant sur M_1 a pour intensité 14 *gf*.

❷ On laisse aller le système sans vitesse initiale. Calculer l'accélération de M_1, la tension du fil et la vitesse atteinte par M_1 lorsqu'il arrive dans l'air, sachant que M_1 parcourt 0,326 m dans le liquide. On prendra $g = 9{,}78$ m/s² et on négligera tous les frottements.

❸ Quel est le mouvement de M_1 après sa sortie du liquide? Quelle est la tension du fil? Au bout de combien de temps les deux masses auront-elles parcouru en tout 1 m chacune? (*D'après Bac.*)

Contrôle n° 5. Deux masses $M_1 = 2$ kg et $M_2 = 2$ kg peuvent glisser sur un plan horizontal. Une force de frottement $f_1 = 6$ N s'oppose au mouvement de M_1, une force $f_2 = 4$ N s'oppose au mouvement de M_2. M_1 est relié à M_2 par un crochet d'attelage C. Un fil passant sur une poulie de masse négligeable, tournant sans frottement, relie M_2 à une masse $M_3 = 4$ kg. On prendra $g = 10$ m/s².



❶ On laisse aller le système sans vitesse initiale, après 187,5 cm de parcours, en passant par un dispositif O le crochet C s'ouvre. Quelle est à cet instant la vitesse de M_1, M_2 et M_3?

❷ Au bout de combien de temps après le décrochage M_1 s'arrête-t-elle?

❸ Au bout de combien de temps après le décrochage la distance entre M_1 et M_2 a-t-elle augmenté de 4,25 m? (Le plan horizontal est de dimension suffisante.)

Contrôle n° 6. Un traîneau à moteur de masse $m_1 = 460$ kg entraîne une luge de masse $m_2 = 40$ kg. Dans *tout le problème* on admettra que les forces de frottement représentent 0,2 N par kg en mouvement. $g = 10$ m/s².

A) L'ensemble monte une côte de pente 10 %.

❶ Au démarrage la vitesse passe de 0 à 36 km/h en 50 m. Calculer la force de traction du traîneau et la tension du fil reliant la luge au traîneau.

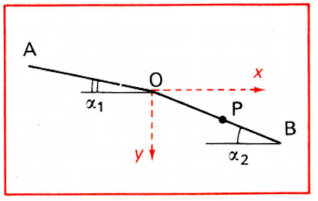
❷ Ensuite la force de traction devient égale à 600 N. Que devient la tension du fil?

❸ Pour s'arrêter on débraye le moteur, combien de temps après le débrayage s'arrête-t-on?

B) Un passager monte dans la luge qui part d'un point A sans vitesse initiale. Cette luge glisse sur une pente AO faisant avec l'horizontale un angle α_1 (on donne $\sin \alpha_1 \simeq \operatorname{tg} \alpha_1 = 0{,}2$).

❶ La luge arrive en O à 72 km/h, calculer la distance AO.

❷ En O se produit un changement de pente. La nouvelle pente OB fait avec l'horizontale un angle α_2 (on donne $\operatorname{tg} \alpha_2 = 0{,}4$). On rapporte le mouvement aérien de la luge aux deux axes $\overrightarrow{ox}$ et $\overrightarrow{oy}$. La luge retombe sur OB en un point P dont on déterminera les coordonnées. On négligera les frottements dans l'air.



Contrôle n° 7. Un train se compose d'une locomotive de 150 tonnes et de 9 voitures identiques de 50 tonnes chacune. Il démarre sur une voie rectiligne et horizontale et il atteint la vitesse de 18 km/h au bout d'un parcours de 125 m. On suppose constante la force de traction de la locomotive ainsi que les résistances passives.

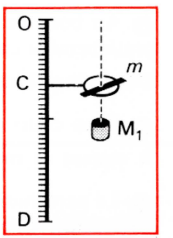
Calculer l'accélération du train et le temps mis pour effectuer le parcours. Avec la même accélération, sur quel parcours et en combien de temps le train atteindra-t-il sa vitesse normale de 90 km/h?

❶ Les résistances au mouvement sont supposées constantes et égales à 50 N par tonne de véhicule. Calculer l'effort de traction de la locomotive pendant la période de démarrage. Que devient cet effort de traction quand le train roule à la vitesse constante de 90 km/h?

❷ Les différentes voitures composant le train sont reliées entre elles par des crochets d'attelage. Chaque crochet est relié au châssis de la voiture par un ressort. La constante de raideur est $k = 10^6$ N/m. Calculer, pendant la période de démarrage, l'allongement des ressorts reliant :
— la locomotive à la première voiture;
— la première voiture à la deuxième;
— la huitième voiture à la neuvième.

❸ La force motrice étant supprimée, le train aborde, à la vitesse de 90 km/h, une voie qui s'élève de 6 mm par mètre de voie. A quelle distance le train s'arrêtera-t-il si les résistances passives conservent la valeur primitive? Combien de temps le train continuera-t-il à rouler? On prendra $g = 10$ m/s². *(Bac.)*

Contrôle n° 8. Aux deux extrémités du fil qui s'enroule sur une poulie de masse négligeable, sont suspendues deux masses $M_1 = 160$ g et $M_2 = 170$ g. On prendra $g = 10$ m/s² et on négligera les frottements. M_1 se déplace devant une règle graduée. On surcharge M_1 d'une masse à ailettes $m = 70$ g susceptible d'être arrêtée par un curseur évidé C. On ramène la masse M_1, ainsi surchargée, devant le zéro de la règle et on la laisse aller sans vitesse initiale.



❶ Calculer l'accélération γ_1 de M_1 avant le passage par le curseur C.

❷ Calculer la décélération γ_2 de M_1 après le passage par le curseur C.

❸ Evaluer la distance OC (O : zéro de la règle) sachant que la masse m est enlevée après 1 s de chute. Calculer à ce moment la vitesse de M_1. A quelle vitesse M_1 arrive-t-elle en D tel que OD = 2 m.

❹ A quelle distance OC doit-on placer le curseur pour que M_1 (surchargée), partant de O à vitesse nulle, arrive en D à vitesse nulle (OD = 2 m).

Contrôle n° 9. Soit un véhicule sur coussin d'air, que l'on assimilera à un parallélépipède rectangle, de base 4 × 2 m² de masse 800 kg; on appelle $\vec{F}$, la force parallèle à la vitesse $\vec{v}$ développée par son hélice, et p la pression uniforme maintenue sous la base du véhicule par un compresseur.

❶ Le véhicule est immobile au-dessus du sol. Calculer p. La pression atmosphérique, p_a, égale 10^5 N/m². Déterminer la pression effective $p_e = p - p_a$. Montrer que l'emploi de la pression effective p_e permet d'éliminer une force de l'inventaire des forces appliquées au véhicule.

❷ Le véhicule démarre, sur un sol horizontal, suivi d'une côte d'inclinaison 11°30′, avec une accélération constante, 2 m/s². Ensuite, il ralentit sur une descente d'inclinaison 17°30′, la décélération égale 1 m/s². Evaluer F et p_e au cours de chacune des trois phases de ce mouvement.

Contrôle n° 10. Un câble porteur C, de longueur 100 m, est tendu entre deux stations A et B. La dénivellation entre la station A et la station inférieure B est égale à 80 m. Une benne suspendue, de masse 100 kg, peut se déplacer sans résistances appréciables le long du câble C.

❶ Si la benne était abandonnée de A, sans vitesse, quelle serait sa vitesse lors de son arrivée en B? Quelle serait la durée du parcours?

❷ Le mouvement de la benne est commandé depuis la station A par l'intermédiaire d'un câble tracteur parallèle au câble C, de telle sorte que la durée de la descente AB soit minimale. Les servitudes mécaniques du dispositif imposent à la vitesse une valeur maximale égale à 4 m/s et à la tension du câble tracteur une valeur maximale égale à 1 600 N. Le mouvement se décompose en deux phases, uniformément variées, et une phase uniforme. Quelle est sa durée? Déterminer la tension du câble tracteur au cours de chacune des phases du mouvement.

❸ Au cours de sa descente, dans les conditions de la 2e question, alors qu'il lui reste 33 m à parcourir, la benne libère sa charge, qui tombe sur le sol au même niveau que B. Quelle est la durée de la chute ? Quelle est la vitesse de la charge lors de son arrivée au sol ? On prendra $g = 10$ m/s².

Contrôle n° 11. Un parachutiste ayant, avec son équipement, une masse de 100 kg, est relié par un câble c à un parachute de masse 20 kg. On négligera la résistance de l'air s'exerçant sur le parachutiste. $g = 10$ m/s².

❶ Il saute d'un hélicoptère, pratiquement sans vitesse initiale, il tombe pendant 3 s, en chute libre. Déterminer la distance parcourue et la vitesse acquise.

❷ Au bout de ces 3 s de chute libre, le parachute s'ouvre subissant une force résistance $\vec{R}$, pratiquement constante, le mouvement se ralentit pendant 108 m, la vitesse finale égale 6 m/s. Déterminer l'intensité de $\vec{R}$ et la tension du câble c.

❸ Si au cours du mouvement précédent le parachutiste s'était délesté d'une charge de 20 kg, $\vec{R}$ restant la même, quelle aurait été la tension du câble c ?

❹ Le parachutiste achève sa chute à la vitesse constante de 6 m/s, avec son équipement complet. Déterminer la tension du câble c, et celle des 100 cordelettes qui, partant de la périphérie du parachute, sont fixées en un point O au câble c. Diamètre du parachute : 4 m. Longueur des cordelettes : 5 m.

Contrôle n° 12.

❶ Un skieur de masse $m = 80$ k, descend une piste inclinée d'un angle $\alpha = 30°$, par rapport à l'horizontale, de longueur 72 m. La résultante $\vec{F}$ des diverses forces résistantes dues aux frottements, opposée à la vitesse $\vec{v}$, a une intensité constante $F = 80$ N. Sachant que le skieur est parti sans vitesse, évaluer sa vitesse en bout de piste. Déterminer la pression, exercée sur la neige, par les skis, de surface $S = 1\,500$ cm², chacun. On donne : $g = 10$ m/s².

❷ Le skieur parcourt ensuite une côte, inclinée d'un angle $\alpha = 22°30'$, par rapport à l'horizontale, au sommet de cette côte, O, sa vitesse n'est plus que $v_0 = 13$ m/s. Après O, se présente une descente inclinée de 45°. Le skieur, lancé à la vitesse $\vec{v_0}$, accomplit un saut, il retombe sur le sol de la descente en M. Déterminer la distance OM.

❸ Le skieur gravit une pente, inclinée de $\alpha = 45°$. Son mouvement comporte deux phases :

a) Une phase uniformément accélérée, sans vitesse initiale, d'accélération $\gamma = 1$ m/s².

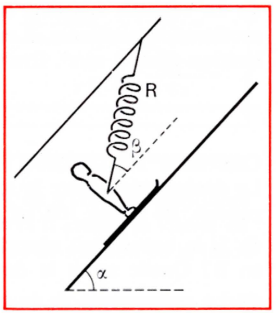
b) Une phase uniforme.

Il est relié au câble tracteur d'un remonte-pente par l'intermédiaire d'un ressort R, de raideur $k = 10^4$ N/m dont l'axe fait avec la pente, l'angle $B = 30°$.

Evaluer l'allongement du ressort au cours de chaque phase.

La force $\vec{F}$ a la même intensité qu'à la question ❶.

Evaluer la pression exercée par les skis sur la neige.



Dynamique du mouvement rectiligne sinusoïdal

Pb 10

■ Conseils généraux

- Pour démontrer qu'un mouvement rectiligne est sinusoïdal il suffit de montrer que l'accélération est centripète et proportionnelle au module de l'élongation $\gamma = C|x|$ avec $C > O$; dans ce cas $C = \omega^2$.
- Il est préférable pour les élèves de C. et E. de montrer que $\bar{\gamma} = -Cx$.
- Comment arriver à cette relation?

— On étudiera d'abord l'équilibre.
— Ensuite comptant l'élongation x à partir de la position d'équilibre, on évaluera l'accélération en fonction de x.

---

n° 43.

ÉNONCÉ

❶ Un solide S de masse $m = 200$ g, est suspendu à un ressort de masse négligeable, parfaitement élastique, le ressort s'allonge de 8 cm. Evaluer la raideur du ressort. $g = 10$ m/s².

CORRIGÉ

Soit x_0 *l'allongement à l'équilibre,* F_0 *la tension du ressort. La masse étant en équilibre*

$$F_0 = kx_0 = P = mg, \text{ d'où } k = \frac{mg}{x_0} = \frac{0{,}2 \cdot 10}{8 \cdot 10^{-2}} = 25 \text{ N/m}.$$

ÉNONCÉ

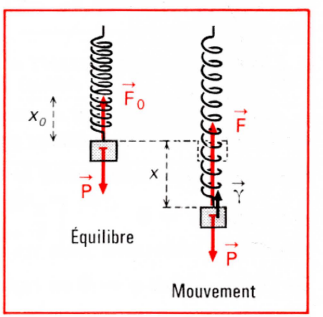
❷ Le solide est tiré verticalement, vers le bas, de 4 cm, à partir de sa position d'équilibre, puis il est abandonné sans vitesse initiale. Quelle est la nature de son mouvement? Quelle est la période des oscillations? Quelle est leur amplitude? Leur vitesse maximale?

CORRIGÉ

- *Soit* x *l'élongation de la masse comptée à partir de sa position d'équilibre.*
- *La masse subit deux forces : la traction du ressort* $\vec{F}$ *et* $\vec{P}$. *L'allongement du ressort, à partir de sa longueur à vide est* $(x_0 + x)$, *d'où* $F = k(x_0 + x)$.
- *Appliquons le théorème du centre de gravité*

$$\vec{P} + \vec{F} = m\vec{\gamma} \Longrightarrow F - P = m\bar{\gamma} \Longrightarrow k|x| = m\gamma$$

l'accélération est centripète ($F > P$ *sur la figure*) *et est proportionnelle à l'élongation, le solide est donc animé d'un mouvement de translation rectiligne sinusoïdal :*



$$\gamma = \frac{k}{m}|x| = \omega^2|x| \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}56 \text{ s}.$$

- *L'élongation maximale ou amplitude a pour valeur l'écart initial* $a = 4$ cm.
- *L'équation horaire du mouvement est de la forme* $x = a \sin(\omega t + \varphi)$, *la vitesse* $\bar{v} = a\omega(\cos \omega t + \varphi)$ *est maximale pour* $\cos(\omega t + \varphi) = 1$

d'où $$v_{maxi} = a\omega = a\sqrt{\frac{k}{m}} = 4 \cdot 10^{-2}\sqrt{\frac{25}{0.2}} = 0{,}2\sqrt{5} \simeq 0{,}45 \text{ m/s}.$$

n° 44.

ÉNONCÉ

❶ On suspend un solide de masse $m = 400$ g, à un ressort de masse négligeable, parfaitement élastique. On fait osciller verticalement ce solide, la durée de 20 oscillations est égale à 16 s. Montrer que le mouvement est sinusoïdal. Déterminer la raideur du ressort. On prendra $\pi^2 = 10$.

CORRIGÉ

Voir exercice précédent : $T = 0{,}8\ s = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \Longrightarrow k = 25\ N/m.$

ÉNONCÉ

❷ La masse est tirée de 10 cm, verticalement, dans un sens que l'on prendra comme sens positif. A l'instant $t = 0$ on l'abandonne sans vitesse. Ecrire l'équation horaire du mouvement.

CORRIGÉ

L'équation horaire est de la forme $x = a \sin(\omega t + \varphi)$, *d'où la vitesse* $v = a\omega \cos(\omega t + \varphi)$.

A l'instant $t = 0$ $\begin{cases} x = 0{,}1\ m, & d'où \quad 0{,}1 = a \sin \varphi \quad (1) \\ v = 0\ , & d'où \quad 0 = a\omega \cos \varphi \quad (2) \end{cases}$

De (2) *on déduit* $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ *en reportant dans* (1) *on en déduit* $a = 0{,}1$ m.

($\varphi = -\pi/2$ *est à exclure car cela donnerait une amplitude négative* $a = -0{,}1$ m.)

d'où $\quad x = 0{,}1 \sin\left(\dfrac{2\pi}{0{,}8}t + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0{,}1 \sin(2{,}5\ \pi t + \dfrac{\pi}{2}) = 0{,}1 \cos(2{,}5\ \pi t).$

ÉNONCÉ

❸ Le ressort et la masse sont animés d'un mouvement de translation verticale, de vitesse constante $v_0 = 0{,}79$ m/s. Quel est l'allongement du ressort ? A l'instant $t = 0$, l'extrémité supérieure du ressort s'arrête instantanément. Ecrire l'équation horaire du mouvement ultérieur de la masse. Montrer que v_0, ne doit pas dépasser une valeur, que l'on déterminera, si l'on veut que le ressort soit constamment tendu. $g = 10\ m/s^2$.

CONSEIL

Avant l'arrêt la masse est en mouvement rectiligne uniforme. L'arrêt brusque lance la masse à la vitesse v_0.

CORRIGÉ

- *L'allongement du ressort est celui qui correspond à l'équilibre* $x_0 = \dfrac{mg}{k} = 0{,}16$ m.

- *Après l'arrêt du point de suspension, la masse a un mouvement sinusoïdal de période* 0,8 s, *seules les conditions initiales ont changé.*

Prenons comme sens positif le sens de $\overrightarrow{v_0}$.

A l'instant $t = 0$ $\begin{cases} x = 0 & d'où \quad 0 = a \sin \varphi \quad (1) \\ v = v_0 & d'où \quad v_0 = a\omega \cos \varphi \quad (2) \end{cases}$

De (1) *on déduit* $\varphi = 0$ *en reportant dans* (2) $\Longrightarrow a\omega = v_0 \Longrightarrow a = \dfrac{v_0}{\omega} \simeq 0{,}1$ m.

($\varphi = \pi$ *est à exclure car cela donnerait une amplitude négative* $a = -0{,}1$ m.)

D'où $\quad x = 0{,}1 \sin(2{,}5\ \pi t)$

- *La tension du ressort* $F = k(x_0 + x)$, *le ressort est constamment tendu si* $x_0 + x > 0$

$\Longrightarrow x > -x_0$, *comme* $x \in [-a, a] \Longrightarrow -a > -x_0 \Longrightarrow x_0 > a$. *Comme* $a = \dfrac{v_0}{\omega}$

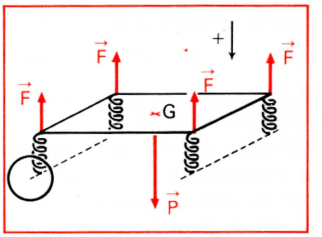
$\Longrightarrow x_0 > \dfrac{v_0}{\omega} \Longrightarrow v_0 < x_0\omega$, *numériquement* $v_0 < 1{,}25$ m/s.

n° 45. Le dispositif de suspension d'une automobile de masse 1 tonne, peut être assimilé à quatre ressorts verticaux, équidistants du centre de gravité, de raideurs égales à 800 N/m. Déterminer la période des oscillations verticales de ce véhicule.

ÉNONCÉ

Remarquer que par raison de symétrie les ressorts jouent des rôles identiques.

CONSEIL



CORRIGÉ

• *A l'équilibre, soit* x_0 *le raccourcissement de chaque ressort. Chaque ressort exerce sur la carrosserie la force* $F_0 = kx_0$.
La carrosserie étant en équilibre :

$$\vec{P} + 4\vec{F}_0 = \vec{0} \Longrightarrow 4\,kx_0 = P \qquad (1)$$

• *Soit* x *l'élongation de l'automobile comptée vers le bas, à partir de sa position d'équilibre, le raccourcissement total des ressorts est alors* $x_0 + x$,
d'où

$$F = k(x_0 + x) \qquad (2)$$

Appliquons le théorème du centre de gravité

$$\vec{P} + 4\vec{F} = m\vec{\gamma} \Longrightarrow P - 4F = m\bar{\gamma},$$

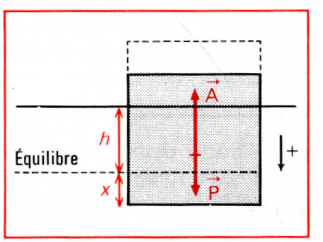
tenant compte de (1) *et* (2) $\Longrightarrow -4kx = m\bar{\gamma} \Longrightarrow \bar{\gamma} = -\dfrac{4k}{m}x.$

• *L'accélération est de la forme* $\bar{\gamma} = -\omega^2 x$, *le mouvement est sinusoïdal :* $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 3{,}5$ s.

---

n° 46. Un cylindre droit de masse m, de surface S, flotte sur un liquide de poids volumique ϖ. On enfonce le cylindre, et on le laisse aller verticalement. Il émerge constamment. Montrer que le mouvement est sinusoïdal, évaluer sa période. On néglige les frottements. $m = 800$ g, $S = 10$ cm^2, $\varpi = 10^4$ N/m^3.

ÉNONCÉ



CORRIGÉ

• *Soit* h *la hauteur de la partie immergée à l'équilibre, le cylindre est soumis à son poids* $\vec{P}$ *et à la poussée d'Archimède* $\vec{A_0}$ *d'intensité* $A_0 = h.S.\,\varpi$ *telle que*

$$\vec{A_0} + \vec{P} = \vec{O} \Longrightarrow A_0 = P \Longrightarrow hS\,\varpi = mg \qquad (1)$$

• *Soit* x *l'élongation du cylindre comptée à partir de la position d'équilibre. D'après le théorème du centre de gravité :*

$$\vec{P} + \vec{A} = m\vec{\gamma} \qquad \text{avec} \qquad A = (h + x).S.\,\varpi \qquad (2)$$

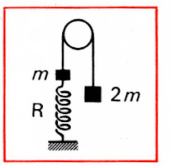
d'où $P - A = m\bar{\gamma}$, *tenant compte de* (1) *et* (2) $\Longrightarrow -\omega Sx = m\bar{\gamma}$,

d'où $\bar{\gamma} = -\dfrac{\varpi S}{m}x$, $\bar{\gamma}$ *est de la forme* $-\omega^2 x$: *le mouvement est donc sinusoïdal de période*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\varpi S}} = 1{,}78 \text{ s.}$$

---

n° 47. Un ressort R retient deux solides de masse m et $2m$, la masse de la poulie et les frottements sont négligeables, le fil est inextensible. On tire le solide de masse $2m$ vers le bas d'une longueur a, à partir de sa position d'équilibre, ce qui a pour effet d'augmenter la tension de R, puis on l'abandonne sans vitesse. Montrer que les solides ont des mouvements sinusoïdaux, évaluer la période.



ÉNONCÉ

CORRIGÉ

• *Etudions l'équilibre du système : le solide de masse* m *est soumis à son poids* $\vec{p}$, *à la tension du ressort* $\vec{f}_0$, *à celle du fil* $\vec{F}_0$

$$\vec{p} + \vec{F}_0 + \vec{f}_0 = \vec{0} \qquad -p - f_0 + F_0 = 0$$

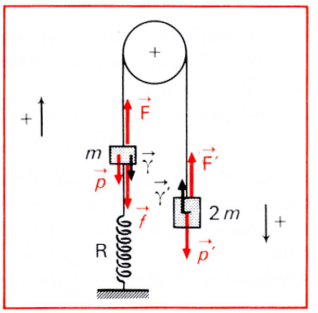
Soit x_0 *l'allongement du ressort* $f_0 = kx_0$,
d'où $-p - kx_0 + F_0 = 0$ (1)

Pour le second solide

$$\vec{p}' + \vec{F}'_0 = \vec{0} \Longrightarrow p' - F'_0 = 0 \qquad (2)$$

Il n'y a pas de frottement donc $F_0 = F'_0$, *d'après les relations* (1) *et* (2)

$$p' - p - kx_0 = 0 \qquad (3)$$



• *Considérons le système en mouvement, les deux solides ont la même élongation* x, *comptée à partir de leurs positions d'équilibre puisque le fil est inextensible ; dans ce cas l'allongement du ressort est* $(x_0 + x)$ *et sa tension* $f = k(x_0 + x)$.

D'après le théorème du centre de gravité :

$$\vec{p} + \vec{f} + \vec{F} = m\vec{\gamma} \Longrightarrow -p - k(x_0 + x) + F = m\bar{\gamma} \qquad (4)$$

De même $\vec{p}' + \vec{F}' = 2m\vec{\gamma}' \Longrightarrow p' - F' = 2m\bar{\gamma}'$ (5)

Là encore $F = F'$, *d'autre part* $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}'$. *D'après les relations* (4) *et* (5)

$$p' - p - k(x_0 + x) = 3m\bar{\gamma} \qquad (6)$$

Tenant compte de la relation (3) *il reste* $-kx = 3m\bar{\gamma}$, *soit* $\bar{\gamma} = -\dfrac{k}{3m}x$

L'accélération est de la forme $\bar{\gamma} = -\omega^2 x$, *le mouvement est sinusoïdal de pulsation* $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{3m}}$, *de période* $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{3m}{k}}$.

Remarques : *La période est donc la même que si la masse* 3 m *était accrochée directement au ressort* R. *Pour que le ressort soit toujours tendu il faut que l'amplitude* a *ne soit pas trop grande* $(a < x_0)$.

ÉNONCÉ

n° 48. Entre deux points A et B, sont tendus deux ressorts identiques, de longueur à vide l_0, de raideur k. Ils soutiennent un disque M d'épaisseur négligeable de masse, m.

❶ Déterminer la position d'équilibre du disque.

Application numérique : AB = 45 cm $\quad l_0 = 15$ cm $\quad k = 20$ N/m $\quad m = 100$ g $\quad g = 10$ m/s².

CORRIGÉ

Le disque est soumis à son poids $\vec{p}$, *à la tension du ressort inférieur* $\vec{F}_B$, *à celle du ressort supérieur* $\vec{F}_A$. *Il est en équilibre donc :*

$$\vec{p} + \vec{F}_B + \vec{F}_A = \vec{0} \Longrightarrow p + F_B - F_A = 0$$

Soit x_A *l'allongement du ressort supérieur,* x_B *l'allongement du ressort inférieur :*

$F_A = kx_A$, $F_B = kx_B$ *d'où* $k(x_A - x_B) = mg$ (1)

D'autre part $AB = 2l_0 + x_A + x_B$ (2)

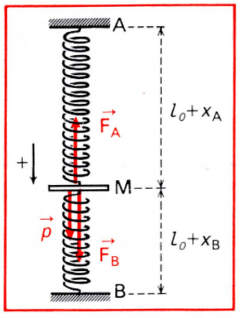
Les équations (1) *et* (2) *permettent de déterminer* x_A *et* x_B :

Application numérique :

$$20(x_A - x_B) = 1 \qquad (1)$$

$$x_A + x_B + 0{,}3 = 0{,}45 \qquad (2)$$

On en déduit $x_A = 0{,}1$ m $\quad x_B = 0{,}05$ m



2 La masse est écartée de sa position d'équilibre, puis elle oscille verticalement. Déterminer la nature et la période du mouvement.

ÉNONCÉ

Soit x, *l'élongation de* M, *comptée vers le bas à partir de sa position d'équilibre ; l'allongement du ressort supérieur est alors* $(x_A + x)$ *d'où* $F_A = k(x_A + x)$; *celui du ressort inférieur est* $(x_B - x)$ *d'où* $F_B = k(x_B - x)$.

Ecrivons la relation fondamentale de la dynamique $\vec{p} + \vec{F_A} + \vec{F_B} = m\vec{\gamma}$, *d'où*

$$p + F_B - F_A = m\bar{\gamma} \text{ soit } p + k(x_B - x) - k(x_A + x) = m\bar{\gamma} \qquad (2),$$

tenant compte de la condition d'équilibre (1) *on en déduit* $-2kx = m\bar{\gamma} \Longrightarrow \bar{\gamma} = -\dfrac{2k}{m}x$.

CORRIGÉ

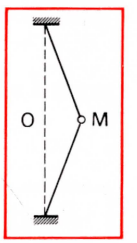
L'accélération est de la forme $\bar{\gamma} = -\omega^2 x$, *le mouvement est donc sinusoïdal de pulsation* $\omega = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$, *de période* $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$.

Application numérique : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{0{,}1}{40}} = \dfrac{2\pi}{20} = 0{,}31$ s.

Remarque : *la période des oscillations est donc la même que si le disque était suspendu aux deux ressorts accrochés au point* A.

---

n° 49. Au milieu d'une corde élastique verticale est fixé un point matériel M de masse *m*. M est écarté de sa position d'équilibre O, horizontalement, d'une distance *a*, puis est abandonné sans vitesse. Déterminer l'équation horaire du mouvement de M.



Noter que : les deux brins de la corde ont sensiblement la même tension F, très supérieure au poids de M, pratiquement constante au cours du mouvement.

a est très petit devant la longueur totale *l* de la corde.

Application numérique : $a = 5$ cm $\quad F = 8$ N $\quad m = 10$ g $\quad l = 2$ m.

ÉNONCÉ

Le poids de M est négligeable. Trouver la relation entre $\bar{\gamma}$ et $\overline{OM} = x$ en faisant intervenir l'angle $\alpha = \widehat{OAM}$ qui est un angle petit.

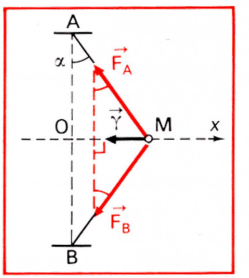
CONSEIL

- *Le point* M *est soumis à deux forces* $\vec{F_A}$ *et* $\vec{F_B}$. *Il faut admettre, le poids étant négligeable, que* $F_A = F_B = F$ *quel que soit* OM.

- *D'après le principe fondamental de la dynamique*

$$\vec{F_A} + \vec{F_B} = m\vec{\gamma}.$$

On remarquera que $\vec{F_A} + \vec{F_B}$ *n'a aucune composante suivant la verticale : le vecteur* $\vec{\gamma}$ *est donc dirigé vers* O.
Projetons sur l'horizontale $-2F \sin\alpha = m\bar{\gamma}$, *en mesurant* $\bar{\gamma}$ *suivant l'axe* $\overrightarrow{Ox}$.



- *Evaluons* $\sin\alpha$. *L'angle* α *est toujours petit donc* $\sin\alpha \simeq \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{OM}{AO} = \dfrac{2x}{l}$.

CORRIGÉ

● *Finalement* $-2F \cdot \frac{2x}{\ell} = m\bar{\gamma}$ *d'où* $\bar{\gamma} = -\frac{4F}{\ell m} \cdot x$.

M *est donc animé d'un mouvement rectiligne dont l'accélération est de la forme* $\bar{\gamma} = -\omega^2 x$,

par conséquent ce mouvement est sinusoïdal de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{4F}{\ell m}} = 2\sqrt{\frac{F}{\ell m}} = 40$ rd/s.

CORRIGÉ

L'équation horaire du mouvement s'écrit donc $x = a' \sin(\omega t + \varphi)$.

A l'instant $t = 0$ $\quad \begin{cases} x = a \Longrightarrow a = a' \sin \varphi & (1) \\ v = 0 \Longrightarrow o = a' \omega \cos \varphi & (2) \end{cases}$

De (2) *on en déduit* $\varphi = \frac{\pi}{2}$, *en reportant dans* (1) *on en déduit* $a' = a = 5.10^{-2}$ m.

D'où l'équation horaire

$$x = 5.10^{-2} \sin\left(40t + \frac{\pi}{2}\right) = 5.10^{-2} \cos 40t.$$

Force d'inertie

Conseils généraux

La plupart des problèmes proposés dans ce chapitre peuvent être également résolus en choisissant comme repère la Terre, c'est-à-dire sans faire intervenir les forces d'inertie. N'oublions pas que les forces d'inertie ont les mêmes effets que les forces appliquées et qu'il est très intéressant de les faire intervenir pour décrire ce qui se passe à l'intérieur d'une cage en mouvement.

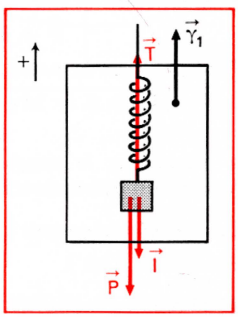
ÉNONCÉ

n° 50. Un solide de masse $m = 200$ g est accroché à un ressort de masse négligeable, dont l'autre extrémité est fixée au plafond de la cabine d'un ascenseur. La longueur du ressort à vide est $l_0 = 20$ cm, sa raideur $k = 40$ N/m. On donne $g = 10$ m/s². La cabine démarre, vers le haut, d'un mouvement uniformément accéléré, elle atteint la vitesse de 5 m/s après 5 m de parcours. Ensuite elle conserve cette vitesse. Puis elle s'arrête en 2,5 s, d'un mouvement uniformément retardé. Evaluer, au cours, de chaque phase de l'ascension la longueur du ressort. On admettra qu'il n'y a pas d'oscillations.

CONSEIL

On déterminera l'accélération de la cabine dans chaque phase pour en déduire $\vec{I}$ (force d'inertie).

CORRIGÉ



● *Mesurons* $\vec{\gamma}$ *algébriquement sur un axe vertical ascendant, on trouvera facilement* $\overline{\gamma_1} = 2{,}5$ m/s²; $\overline{\gamma_2} = 0$; $\overline{\gamma_3} = -2$ m/s².

● *Dans la cabine animée d'un mouvement de translation d'accélération* $\vec{\gamma}$ *le solide est en équilibre relatif sous l'action de son poids* $\vec{P}$, *de la traction du ressort* $\vec{T}$ *et d'une force d'inertie* $\vec{I} = -m\vec{\gamma}$.

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{I} = \vec{0}$$

Compte tenu du sens positif choisi :

$$-P + T - m\bar{\gamma} = 0 \Longrightarrow T = m(g + \bar{\gamma}).$$

Soit l *la longueur du ressort, l'allongement* $l - l_0$ *est tel que* $T = k(l - l_0)$,

d'où
$$l - l_0 = \frac{m(g + \bar{\gamma})}{k}.$$

● *Numériquement on trouve* $l_1 = 26{,}25$ cm $\quad l_2 = 25$ cm $\quad l_3 = 24$ cm.

Remarque : *la masse* m *a pour poids apparent* $\vec{P}' = \vec{P} + \vec{I}$, $P' > P$ (*1re phase*), $P' = P$ (*2e phase*), $P' < P$ (*3e phase*).

n° 51. Au plafond d'une automobile est accrochée une petite sphère de masse $m = 100$ g, par l'intermédiaire d'un fil de masse négligeable. $g = 10$ m/s².

ÉNONCÉ

❶ L'automobile a, au démarrage, une accélération constante égale à 2 m/s². Déterminer l'inclinaison du pendule (ensemble fil, sphère) par rapport à la verticale, ainsi que la tension du fil.

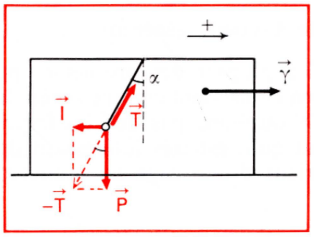
CORRIGÉ

● *La sphère est en équilibre relatif dans la voiture. Elle est soumise à son poids* $\vec{P}$, *à la traction du fil* $\vec{T}$ *et à une force d'inertie* $\vec{I} = -m\vec{\gamma}$

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{I} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{I} = -\vec{T},$$

on voit sur la figure, comme $\vec{I} \perp \vec{P}$, *que*

$$\text{tg}\alpha = \frac{I}{P} = \frac{\gamma}{g} \Longrightarrow \alpha = 11°20'.$$



● *D'autre part* $\cos\alpha = \frac{P}{T} \Longrightarrow T = \frac{P}{\cos\alpha} = 1{,}02$ N. (1,02 N *est aussi le poids apparent de* m, *la direction du fil est la verticale apparente).*

ÉNONCÉ

❷ Ensuite, grâce à sa vitesse acquise, l'automobile gravit une côte, faisant un angle β avec l'horizontale. Le moteur est débrayé, on néglige les frottements. Montrer que le pendule est perpendiculaire au plafond de la voiture.

CONSEIL

Montrer que dans ces conditions le théorème des moments (de forces) est vérifié.

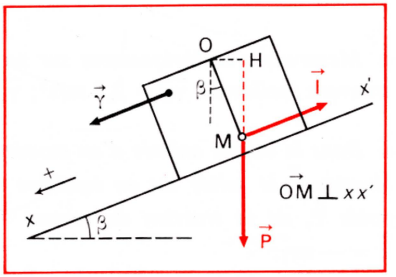
CORRIGÉ

● *Soit* M *la masse de l'automobile,* $\vec{P}$ *son poids,* $\vec{R}$ *la réaction du sol*

$$\vec{P} + \vec{R} = M\vec{\gamma}.$$

Projetons sur la pente x'x

$$P \sin\beta = M\gamma \Longrightarrow \gamma = g \sin\beta.$$



● *Supposons le pendule perpendiculaire au plafond. Raisonnons dans un repère lié à l'automobile.*

Le pendule est soumis aux deux forces ($\vec{P}$ *verticale,* $\vec{I}$ *parallèle à* xx').

Evaluons les moments de $\vec{P}$ *et* $\vec{I}$:

$$\mathcal{M}_{\vec{P}} = P.OH = mg.OM.\sin\beta$$

$$\mathcal{M}_{\vec{I}} = I.OM = m\gamma.OM = mg \sin\beta\ OM \Longrightarrow \mathcal{M}_{\vec{P}} = \mathcal{M}_{\vec{I}}$$

Le pendule est donc bien en équilibre relatif.

Dynamique du mouvement circulaire uniforme

■ Conseils généraux

La plupart des problèmes peuvent être résolus en choisissant comme repère la Terre et en appliquant le théorème du centre de gravité.
L'emploi de la force centrifuge suppose que l'on a pris un repère tournant, par rapport auquel le mobile est en équilibre relatif : il faudra donc bien spécifier le repère choisi.

Pour dessiner le vecteur $\vec{\gamma}$ centripète de module $\gamma = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$ ou le vecteur force centrifuge $\vec{I}$, il faut déterminer, au préalable, le centre du cercle décrit par le point matériel ou le centre de gravité.

---

n° 52.

ÉNONCÉ

❶ Une masse ponctuelle, $m = 50$ g, est entraînée dans un mouvement circulaire uniforme, par un fil de longueur $l = 10$ cm, qui décrit, de ce fait, un cône, d'axe vertical, de demi-angle au sommet α. La vitesse de rotation est 1,72 tr/s. $g = 10$ m/s². Déterminer α et la tension du fil.

CORRIGÉ

● *La masse est soumise à son poids* $\vec{P}$ *et à la traction du fil* $\vec{T}$, *d'après le principe fondamental de la dynamique* $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{\gamma}$.
$\vec{\gamma}$ *est dirigé vers le centre* O *du cercle décrit par* M, $\vec{\gamma}$ *est donc perpendiculaire à* $\vec{P}$ *d'où*

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{m\gamma}{P} = \frac{\gamma}{g}.$$

Le mouvement étant circulaire et uniforme

$$\gamma = r\omega^2 \quad \textit{avec} \quad r = OM = l \sin\alpha.$$

Finalement

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{l \sin\alpha \cdot \omega^2}{g} \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l}.$$

● *Numériquement* $\omega = 1{,}72 \cdot 2\pi = 10{,}8$ rd/s $\quad \cos\alpha \simeq 0{,}86 \Longrightarrow \alpha \simeq 30^0$

● *On voit sur la figure que* $\cos\alpha = \frac{P}{T} \Longrightarrow T = \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{0{,}05 \cdot 10}{0{,}86} \simeq 0{,}58$ N.

ÉNONCÉ

❷ On accroche maintenant en un même point de l'axe deux pendules de longueur l et l', de masse m et m'. Montrer que les masses restent dans un même plan horizontal.

CORRIGÉ

Le pendule de longueur l *s'incline de* α *tel que* $\cos\alpha = g/\omega^2 l$,
Le pendule de longueur l′ *s'incline de* α' *tel que* $\cos\alpha' = g/\omega^2 l'$.

● *Soit* O *le centre du cercle trajectoire de* m, O′ *le centre du cercle trajectoire de* m′

$$AO = l\cos\alpha = \frac{l \cdot g}{\omega^2 l} = \frac{g}{\omega^2} \qquad AO' = l'\cos\alpha' = \frac{g}{\omega^2}.$$

Donc AO = AO′, O *et* O′ *sont confondus : les deux cercles sont concentriques, coplanaires.*

ÉNONCÉ

n° 53. Sur un axe vertical Δ, en O est soudée une tige horizontale OA, elle tourne à la vitesse constante ω, autour de Δ. En O est fixée l'extrémité d'un ressort, l'autre extrémité retient un solide S, de masse *m*, de dimensions négligeables, qui peut glisser sans frottements le long de OA. S prend une position d'équilibre sur OA.

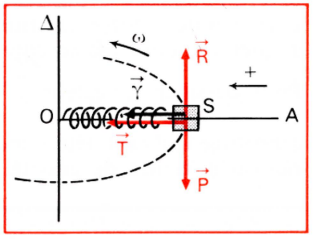
❶ Exprimer l'allongement *a* du ressort en fonction de ω. On désignera par *k* la raideur du ressort, l_0 sa longueur à vide.

CONSEIL

Entraînez-vous à raisonner soit dans un repère lié à la Terre (ce que nous ferons), soit dans un repère tournant lié à (Δ, AO) : il y a alors équilibre relatif.

CORRIGÉ

• *Le solide* S *est soumis à son poids* $\vec{P}$; *à la réaction de la tige* AT, $\vec{R}$; *à la traction du ressort* $\vec{T}$. *Il n'y a pas de frottements donc* $\vec{R} \perp AT$.



• *D'après le théorème du centre de gravité*

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{\gamma} \qquad (1)$$

Le mouvement est circulaire uniforme (*centre* O), *donc* $\vec{\gamma}$ *est centripète.*

Projetons (1) *sur* AO $\Longrightarrow T = m\gamma$. *Comme* $T = ka$ *et* $r = l_0 + a$ *on obtient*

$$ka = m(l_0 + a)\,\omega^2 \Longrightarrow a = \frac{ml_0\omega^2}{k - m\omega^2}.$$

ÉNONCÉ

❷ Montrer que si ω atteint et dépasse une certaine valeur, il n'y a pas d'équilibre possible sur la tige. Que se passe-t-il pratiquement ?

CORRIGÉ

L'allongement a *est un nombre positif, qui n'est défini que si* $k - m\omega^2 > 0$, *soit pour* $\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}$. *Si* $\omega \geqslant \sqrt{\frac{k}{m}}$, *la masse est entraînée le long de* OA *jusqu'à la limite d'élasticité du ressort. Alors ou* r *reste constant, ou bien il y a rupture du ressort.*

ÉNONCÉ

n° 54. Un satellite décrit autour de la Terre une orbite circulaire, à vitesse constante, à une altitude *h*.

❶ Déterminer sa vitesse linéaire. $h = 3\,600$ km, le rayon terrestre est $R = 6\,400$ km; l'accélération de la pesanteur pour $h = 0$ est $g_0 = 10$ m/s².

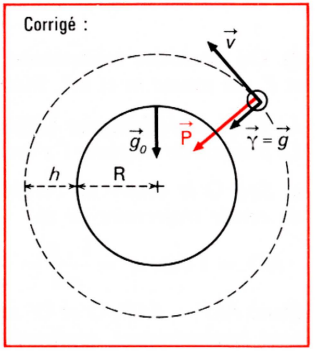
CONSEIL

L'accélération de la pesanteur est inversement proportionnelle au carré de la distance au centre de la Terre (P 7,6).

CORRIGÉ

• *Le satellite est animé d'un mouvement circulaire uniforme, son accélération est centripète*

$$\gamma = \frac{v^2}{r} \qquad \text{avec } r = R + h.$$



• *Le satellite n'est soumis qu'à son poids* $\vec{P}$, *en appelant* $\vec{g}$ *l'accélération de la pesanteur (vecteur centripète) à l'altitude* h, *on en déduit*

$$\vec{P} = m\vec{g} \qquad (1)$$

• *Ecrivons la relation fondamentale de la dynamique*

$$\vec{P} = m\vec{\gamma} \qquad (2)$$

d'où, d'après (1) *et* (2) $\vec{\gamma} = \vec{g}$.

CORRIGÉ

Par suite $\dfrac{v^2}{R+h} = g.$

Comme $\dfrac{g}{g_0} = \dfrac{R^2}{r^2} \Longrightarrow g = g_0 \dfrac{R^2}{(R+h)^2}.$

Finalement $v^2 = \dfrac{g_0 R^2}{R+h} \Longrightarrow v = R\sqrt{\dfrac{g_0}{R+h}}.$

● *Application numérique :* $R = 6{,}4.10^6$ m $\quad R + h = 10^7$m $\quad$ *d'où* $v = 6{,}4.10^3$ m/s.

ÉNONCÉ

❷ Evaluer la durée d'une révolution.

CORRIGÉ

Le mouvement est uniforme, pour faire un tour il faut au satellite une durée T *telle que* $v.T = 2\pi(R + h)$, *d'où* $T = 9\,820$ s $= 2$ h 44 mn.

ÉNONCÉ

❸ A quelle altitude *h*, doit graviter un satellite, dans le plan équatorial, si l'on veut qu'il reste fixe au-dessous d'une station terrestre ?

CORRIGÉ

La période du mouvement doit être égale à la période de rotation de la Terre, d'où $T = 24$ *h*,

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{v} = \frac{2\pi}{R}\cdot\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}}.$$

d'où $(R + h)^3 = \dfrac{T^2R^2g_0}{4\pi^2}$. *On en déduit* $h = 36\,200$ km.

Remarque : *pour extraire la racine cubique on utilisera la table de logarithmes ou la règle à calcul.*

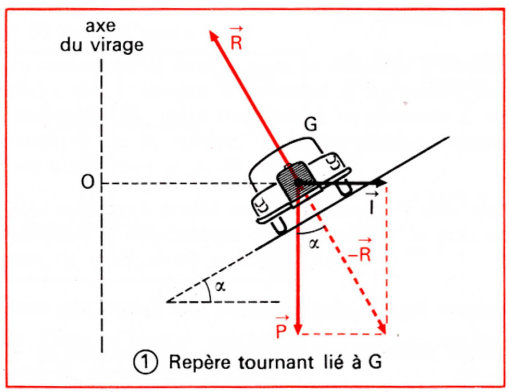
ÉNONCÉ

n° 55. Sur une piste circulaire relevée d'un angle α, par rapport à l'horizontale, de rayon $r = 100$ m, une automobile roule à la vitesse $v = 72$ km/h.

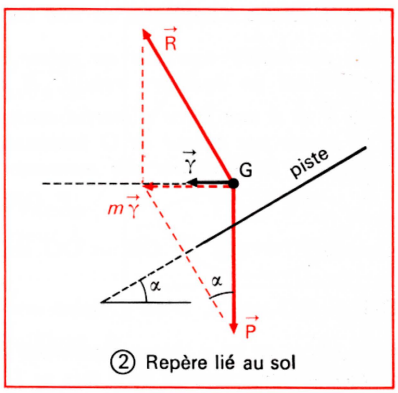
❶ Déterminer α, sachant que les roues ne subissent pas d'efforts latéraux. $g = 10$ m/s².

CONSEIL

La réaction est donc normale au sol (cela veut dire que la voiture n'a aucune tendance à déraper même si la route est parfaitement glissante : on dit alors qu'on a corrigé le virage). Bien déterminer, pour tracer $\vec{I}$ ou $\vec{\gamma}$ le centre du cercle trajectoire du centre de gravité G.



① Repère tournant lié à G



② Repère lié au sol

● G *décrit un cercle horizontal de centre* O. OG = r.

● *Dans un repère, tournant autour de l'axe du virage, lié à* G, G *est en équilibre relatif (figure* 1*) sous l'action de* $\vec{P}$ *(poids de la voiture), de la réaction* $\vec{R}$ *(perpendiculaire au sol), et de la force d'inertie centrifuge, horizontale* $\vec{I}$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{I} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{I} = -\vec{R}$$

CORRIGÉ

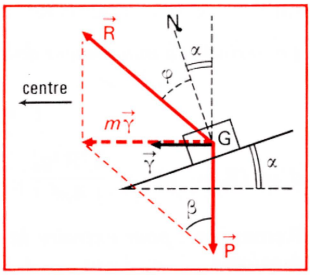
Comme $\vec{I} \perp \vec{P}$, *on voit que* $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{I}{P} = \dfrac{m\gamma}{P} = \dfrac{\gamma}{g}$, *comme* $\gamma = \dfrac{v^2}{r} \Longrightarrow \text{tg}\,\alpha = \dfrac{v^2}{rg}$.

Numériquement $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{400}{100 \times 10} = 0{,}4 \Longrightarrow \alpha = 21°30'$.

Remarque : *dans un repère lié au sol* $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{\gamma}$ *(figure* 2*).*

ÉNONCÉ

❷ Sachant que la réaction du sol peut faire, au plus, un angle $\varphi = 46°30'$ avec la normale au sol, quelle vitesse ne faut-il pas dépasser dans ce virage?



CORRIGÉ

● *Pour changer, raisonnons dans un repère lié au sol.*

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{\gamma}$$

$\vec{\gamma}$ *est toujours horizontal, centripète de module* $\gamma = \dfrac{v^2}{r}$.

Le rayon r *étant donné,* v *sera maximale lorsque* γ *sera maximale.*
On voit sur la figure que $m\gamma$ *est maximal lorsque* β *est maximal (*β *angle de* $\vec{R}$ *avec la verticale).*

● $\vec{R}$ *doit donc être incliné au maximum par rapport à* GN, *c'est-à-dire de l'angle* φ. *Dans ce cas limite,* $\beta = \alpha + \varphi$ *(angles correspondants).*

$$\text{tg}\,\beta = \frac{m\gamma}{P} \Longrightarrow \text{tg}\,(\alpha + \varphi) = \frac{\gamma}{g} \qquad d'où \qquad v^2 = rg\,\text{tg}\,(\alpha + \varphi).$$

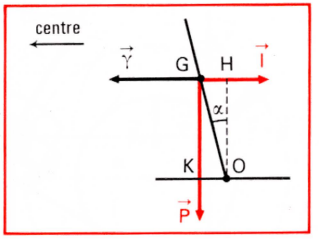
Numériquement on trouve v = 50 m/s = 180 km/h.

ÉNONCÉ

n° 56. Un cycliste effectuant un virage de rayon $r = 25$ m, doit s'incliner de 6° par rapport à la verticale. Déterminer sa vitesse. $g = 10\ m/s^2$.

CONSEIL

Tous les points du cycliste sont pratiquement à la même distance $r = 25$ m de l'axe de rotation. Le champ d'inertie est donc uniforme, comme le champ de pesanteur, la force d'inertie s'applique en son centre de gravité G.



CORRIGÉ

Dans un repère tournant en même temps que lui, le cycliste est en équilibre relatif. Il est soumis à son poids $\vec{P}$ *et à une force d'inertie centrifuge* $\vec{I} = -m\vec{\gamma}$. *Il ne pivote pas autour de* O *(sinon ce serait la chute), appliquons le théorème des moments :*

$$\mathcal{M}_{\vec{P}} = \mathcal{M}_{\vec{I}} \qquad \text{ou} \qquad P.OK = I.OH.$$

Comme P = mg, OK = OG.sin α, $I = m\dfrac{v^2}{r}$,

OH = OG.cos α. *D'où* $g.\sin\alpha = \dfrac{v^2}{r}.\cos\alpha$ *(après simplification par* m *et* OG*)*

$\Longrightarrow v^2 = rg\,\text{tg}\,\alpha$. *Nous retrouvons la même formule que si la route était relevée de* α.
Numériquement $\Longrightarrow v \simeq 5$ m/s = 18 km/h.

n° 57.

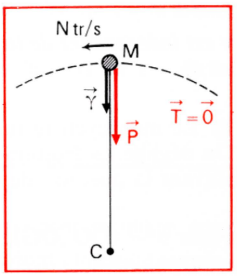
ÉNONCÉ

❶ Une fronde tourne autour d'un point fixe C, en restant dans un plan vertical. Elle est chargée d'une pierre ponctuelle M. Sa longueur $l = CM = 0{,}4$ m. On prendra $g = 10$ m/s². A quelle vitesse minimale N en tr/s, doit-elle passer par la position la plus élevée de M, pour que le fil reste toujours tendu ?

CONSEIL

La valeur minimale de N correspond au passage, par la position la plus élevée, avec une tension du fil nulle.

CORRIGÉ



• *Le point* M *au cours de sa rotation est soumis à la tension* $\vec{T}$ *du fil, à son poids* $\vec{P}$. *D'après le principe fondamental de la dynamique* $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{\gamma}$ (m *masse de* M).

• *Lorsque* M *passe par sa position la plus haute* $\vec{P}$ *et* $\vec{T}$ *sont colinéaires, centripètes, par suite* $\vec{\gamma}$ *est centripète de module* $\gamma = l\,\omega^2 = 1.(2\pi\ N)^2 = 4\pi^2\,l\,N^2$. N *est donc minimal lorsque* γ *est minimal c'est-à-dire lorsque* T *est minimal, donc pour* $T = 0$.

Dans ce cas $\vec{P} = m\vec{\gamma} \Longrightarrow mg = m.4\pi^2\,l\,N^2$

d'où $N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10}{0{,}4}} = \frac{5}{2\pi} \simeq 0{,}8$ tr/s.

ÉNONCÉ

❷ La fronde tourne maintenant à la vitesse constante $N = 5$ tr/s, le poids P devenant négligeable devant la tension du fil. Calculer le rapport T/P.

CORRIGÉ

• *Pour calculer* T, *nous négligeons* P, *donc* $\vec{T} = m\vec{\gamma}$, *le mouvement étant uniforme*

$$\gamma = l\,\omega^2 = 1.4\pi^2N^2 \qquad d'où \qquad T = 4\pi^2mlN^2$$

• *Le rapport*

$$\frac{T}{P} = \frac{4\pi^2mlN^2}{mg} \simeq 40.$$

ÉNONCÉ

❸ En passant par un point O, la pierre M est lâchée. Quelles sont les caractéristiques du vecteur vitesse en O ?

CORRIGÉ

La pierre a en O *une vitesse angulaire* $\omega = 2\pi N = 10\pi$ rd/s, *et une vitesse linéaire* $\vec{v}$. v *est tangent au cercle trajectoire de* M, *donc* $\vec{v} \perp CO$; $\vec{v}$ *a pour module*

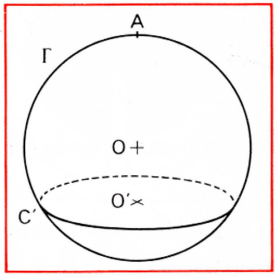
$$v = l\omega = 0{,}4 \times 10.\pi = 12{,}56 \text{ m/s}.$$

Ensuite la pierre est en chute libre (*voir* Pb 6).

---

n° 57 *bis*. (d'après bac.)

ÉNONCÉ



Un motocycliste évolue avec sa machine à l'intérieur d'une sphère dite « sphère de la mort ». Le centre de gravité de l'ensemble, G, reste toujours à la distance $r = 6{,}4$ m du centre O de la sphère. Tous les mouvements considérés sont uniformes. $g = 10$ m/s².

❶ G décrit un grand cercle vertical, Γ ; avec quelle vitesse minimale le conducteur doit-il aborder le pôle supérieur A pour ne pas quitter sa trajectoire ?

CORRIGÉ

Dans un repère tournant avec lui, G *est en équilibre relatif. La force d'inertie centrifuge* $\vec{I}$ *doit au moins équilibrer le poids* $\vec{P}$, *sinon c'est la chute.*

CORRIGÉ

Soit m *la masse du mobile :*

$$\vec{I} = -m\vec{\gamma}$$

A la limite : $\vec{I} = -\vec{P}$ *d'où :*

$$m\frac{v^2}{r} = mg \Longrightarrow v = \sqrt{rg} = 8 \text{ m/s}$$

ÉNONCÉ

❷ La vitesse précédente devrait-elle être modifiée si le motocycliste prenait un passager ?

CORRIGÉ

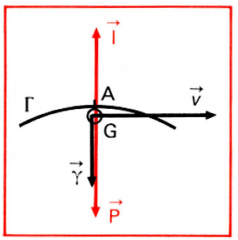
v *est indépendant de la masse* m; *il n'y a donc pas lieu de modifier la vitesse limite calculée au* ❶.

ÉNONCÉ

❸ Le motocycliste tourne sur un cercle horizontal C', de centre O', tel que OO' = d. On néglige les frottements. Quelle doit être sa vitesse pour se maintenir sur C' ? Discuter suivant la position de O'. Application numérique : d = 3,2 m.

CONSEIL

Poser $\alpha = (OO', OG)$. Exprimer v en fonction de $\cos\alpha$ puis de d.



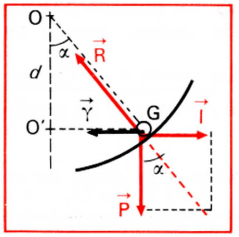
● *Dans le repère tournant avec lui le motocycliste est soumis à* $\vec{P}$, *à la réaction* $\vec{R}$, *normale, de la sphère, à* $\vec{I}$.

● *Il est en équilibre relatif, donc :*

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{I} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{I} = -\vec{R}$$

On voit sur la figure que :

$$\text{tg}\alpha = \frac{I}{P} \qquad (1)$$



● *Evaluons la force centrifuge* I.

$$\sin\alpha = \frac{O'G}{OG} \Longrightarrow O'G = r\sin\alpha$$

$$I = m\gamma = m\frac{v^2}{r\sin\alpha}$$

CORRIGÉ

● *Remplaçons dans* (1) : $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{v^2}{rg}$ (2)

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{r}{d} - \frac{d}{r} \quad \text{puisque } \cos\alpha = \frac{OO'}{OG} = \frac{d}{r}$$

● *Finalement, d'après* (2) : $v = \sqrt{g\left(\dfrac{r^2}{d} - d\right)}$

● Discussion : O' *doit être au-dessous de* O, *sinon* $\vec{R}$ *n'est plus dirigée vers le haut. La projection de* $(\vec{P} + \vec{R} + \vec{I})$ *sur la verticale ne peut être nulle. Il n'y a plus d'équilibre relatif possible.*

● Application numérique : $v = \sqrt{96} = 9{,}8$ m/s.

Contrôles — Pb 10 à Pb 12

Contrôle n° 1. On veut déterminer la constante de raideur k d'un ressort.

1re *méthode*. On fixe au ressort une masse de 100 g, sa longueur passe de 21,0 cm à 25,9 cm. L'accélération de la pesanteur est $g = 9{,}8$ m/s² au 1/100 près. On négligera l'erreur sur la masse. En déduire k et l'incertitude relative sur k.

2e *méthode*. On fait osciller la masse précédente. La durée de 100 oscillations est $t = 44{,}0$ s au 1/10 s près.
En déduire k et l'incertitude relative sur k. Conclure.

Contrôle n° 2. Un point matériel M de masse 100 g exécute un mouvement rectiligne sous l'action d'une force $\vec{f}$ qui l'attire vers un point fixe O de sa trajectoire et dont l'intensité est proportionnelle à la distance OM. Quand le mobile est à 1 cm du point O, la force a une intensité de $3{,}6.10^{-2}$ N.

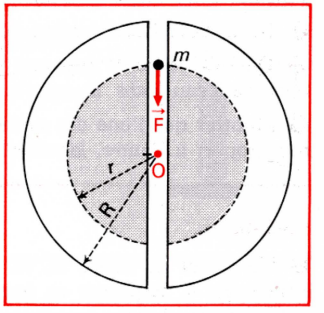
❶ Montrer que le mouvement est sinusoïdal, déterminer sa période.

❷ On prendra comme origine des abscisses le point O. A la date zéro, le mobile est en O animé d'une vitesse 0,3 m/s dans un sens que l'on adoptera comme sens positif sur la trajectoire. Ecrire les équations qui donnent en fonction du temps l'abscisse x du mobile, sa vitesse $\bar{v}$, son accélération $\bar{\gamma}$ et la mesure algébrique de la force $\bar{f}$.

❸ Calculer à quelle date le mobile passe pour la première fois, après l'instant $t = 0$, par le point d'abscisse $x = -3$ cm en se mouvant dans le sens positif.

❹ De combien diminuerait l'amplitude si la vitesse maximale venait à diminuer de 1/100 de sa valeur? (D'après bac.)

Contrôle n° 3. La Terre sera assimilée à une sphère homogène. Supposons qu'un fin canal la traverse diamétralement. Dans ce fin canal se déplace une masse ponctuelle m. On démontre que la résultante $\vec{F}$ des forces de gravitation qui s'exercent sur m, située à r du centre de la Terre, est égale à l'attraction que subirait m, si la masse de la sphère de rayon r était concentrée en O.



❶ Montrer que lorsque m est à la distance r du centre O $F = \frac{4}{3}\pi\varepsilon\mu rm$:

ε constante de gravitation universelle.
μ masse volumique de la Terre.

❷ Evaluer la constante $k = \frac{4}{3}\pi\varepsilon\mu$ en étudiant le cas particulier $r = R = 6\,400$ km (rayon terrestre). On donne pour accélération de la pesanteur à la surface de la Terre $g = 10$ m/s².

❸ En déduire que m est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal, dont on calculera la période.

Contrôle n° 4. Un ressort a une masse négligeable. L'une de ses extrémités est fixe, l'autre soutient une masse de 4 kg. On écarte la masse de sa position d'équilibre selon la verticale, puis on l'abandonne sans vitesse. La masse prend un mouvement sinusoïdal : la durée de 50 oscillations est 46 s.

❶ Calculer la constante de raideur du ressort.

❷ Calculer l'allongement l du ressort à l'équilibre sous l'action des 4 kg. $g = 9{,}8$ N/kg.

❸ Montrer que la période des oscillations s'exprime en fonction de l et g.

❹ Deux masses $m = 4$ kg et $m' = 8$ kg sont reliées par une corde de masse négligeable passant sur une poulie de masse négligeable. La masse m est attachée à l'une des extrémités du ressort précédent dont l'autre est fixée au sol. Quand le système est en équilibre le ressort est vertical. On déplace légèrement l'une des masses selon la verticale puis on la laisse aller sans vitesse. Etudier le mouvement que prend le système et calculer sa période.

Contrôle n° 5. Un fil élastique de masse négligeable est tendu entre deux points A et B, sa longueur est l. En un point M on fixe une masse m, on posera AM $= x$. A et B sont sur la même verticale. On fait ensuite osciller verticalement la masse autour de sa position d'équilibre. On appellera k le coefficient de raideur du fil AB. On admettra que le coefficient de raideur du brin élastique AM (ou BM) qu'on appellera k_A (ou k_B) est inversement proportionnel à la longueur AM (ou BM).

❶ Exprimer la période T des oscillations en fonction de x, m, l et k.

❷ Représenter graphiquement $T^2 = f(x)$.

❸ Application numérique : Calculer la période maximum sachant que si on détache le fil élastique de B et qu'on accroche à l'extrémité ainsi libérée la masse m le fil s'allonge à l'équilibre de 53,9 cm. On donne $g = 9{,}8$ N/kg.

Contrôle n° 6. Dans l'un des wagons d'un train, on a installé :
— un solide de masse m, suspendu à un ressort de masse négligeable, qui de ce fait subit un allongement a ;
— une cuve contenant de l'eau;
— un tube en U, vertical, situé dans un plan parallèle à la voie, de diamètre intérieur négligeable et dont les branches sont distantes de d. Il contient de l'eau. On donne $m = 400$ g; $a = 8$ cm; $g = 10$ m/s²; $d = 10$ cm. Le train démarre sur une voie rectiligne et horizontale, le ressort s'incline d'un angle constant α, par rapport à la verticale.

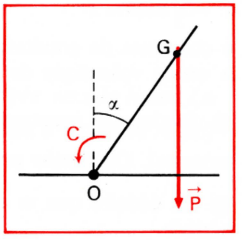
❶ Déterminer l'accélération du mouvement, et l'allongement du ressort, sachant que $\alpha = 14^0$.

❷ Quel est le poids apparent d'un centimètre cube d'eau? Comment se présente la surface libre de l'eau dans la cuve?

❸ Montrer que l'une des surfaces libres de l'eau dans le tube en U est à un niveau supérieur par rapport à l'autre, laquelle? Evaluer la dénivellation h.

Contrôle n° 7.

❶ Un skieur de masse m, en exercice d'assouplissement, s'incline d'un angle α. Exprimer en fonction de α le moment du couple C qu'il doit développer au niveau de ses chevilles. Quelle est la position la moins fatigante? Dans tout le problème la longueur OG $= l$ est constante.



❷ Le skieur descend le long d'une pente inclinée d'un angle β, par rapport à l'horizontale. On néglige les forces de frottements. Montrer que la position « OG perpendiculaire à la pente » est la moins fatigante. L'équilibre relatif du skieur est-il alors stable ou instable?

Contrôle n° 8.

❶ Un accéléromètre est constitué par une masse $m = 300$ g fixée à un ressort, coulissant sans frottements dans un tube. L'autre extrémité du ressort est fixée au tube. La longueur du ressort à vide est 15 cm, lorsqu'il est comprimé au maximum (spires jointives) sa longueur est 5 cm. On prendra $g = 10$ m/s². Lorsque le tube est vertical la masse m comprime le ressort de 2 cm. On veut déterminer l'accélération γ d'un véhicule qui démarre, sans vitesse initiale, sur une piste horizontale. Ce ressort travaille en compression. Comment faut-il placer le tube? La masse entraîne un index qui se déplace devant une graduation en m/s². Dessiner en vraie grandeur cette graduation. On suppose que les variations de γ n'entraînent pas d'oscillations du ressort.

❷ L'appareil est placé dans une fusée qui démarre verticalement. Montrer qu'il est encore utilisable à condition de translater la graduation. Dans quel sens? De combien de centimètres? On négligera les variations de g.

Contrôle n° 9. Une cage d'ascenseur dont la masse est 1 tonne se trouve initialement au fond d'un puits de mine à 147 m de profondeur. On la tire vers le haut pendant un temps t avec une force de 10 290 N, puis pendant le temps t' que dure le reste du trajet avec une force de 8 820 N seulement. $g = 9{,}8$ m/s².

❶ Etablir les équations du mouvement correspondant aux deux phases.

❷ Quelle relation doit-il y avoir entre t et t' pour que la cage arrive en haut avec une vitesse nulle? Quelles sont alors la durée de l'ascension et la vitesse maximum atteinte par la cage?

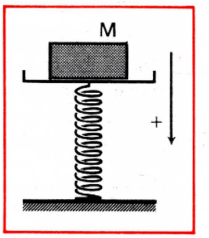
❸ Un dynamomètre supportant une masse de 1 kg est placé dans la cage, il s'allonge de a dans la 1re phase, de a' dans la 2e phase. Calculer le rapport a/a'.

❹ La cage est haute de 2 m. On laisse tomber, sans vitesse initiale, du plafond, une bille. La chute dure θ secondes dans la 1re phase, θ' secondes dans la 2e phase. Calculer le rapport θ/θ'.

Contrôle n° 10. Un ressort vertical, travaillant en compression, supporte un plateau de masse négligeable. On place dans le plateau un cylindre M de masse $m = 500$ g. $g = 10$ m/s².

❶ La période des oscillations de ce système est 0,628 s. En déduire la raideur du ressort.

❷ On comprime le ressort de 10 cm, à partir de sa position d'équilibre, et on le laisse aller à l'instant $t = 0$, sans vitesse initiale.
Quelle est l'équation horaire de son mouvement? Quelle est l'équation donnant la mesure algébrique $\bar{\gamma}$ du vecteur accélération en fonction du temps. On mesurera x et $\bar{\gamma}$ algébriquement sur un axe vertical orienté vers le bas.



❸ Le plateau exerce sur le cylindre M une force $\vec{R}$. Relier R à $\bar{\gamma}$.
En déduire comment varie le module de $\vec{R}$ en fonction du temps.
Représenter graphiquement.

Contrôle n° 11.

❶ Pour lancer un satellite de la Terre, on utilise une fusée porteuse dont le moteur développe une poussée constante de 12.10^5 N. L'ensemble fusée-satellite a une masse de 100 tonnes. La fusée consomme régulièrement une tonne de carburant-comburant par seconde. Comment varie l'accélération en fonction du temps? Quelle est l'accélération de pesanteur apparente à l'intérieur de la cabine du satellite une minute après le départ? On suppose que la trajectoire de la fusée est verticale et que g reste égal à 10 m/s².

❷ Le satellite arrive ainsi sur une orbite circulaire, ayant pour centre le centre de la Terre. Le rayon de l'orbite est 7 000 km, le rayon terrestre 6 400 km. A quelle vitesse constante le satellite décrit-il cette orbite? Quelle est la durée d'un tour? Quelle est l'accélération apparente à l'intérieur de la cabine? On admettra que l'accélération de la pesanteur est inversement proportionnelle au carré de la distance au centre de la Terre. On prendra $g = 10$ m/s² à la surface de la Terre.

❸ Imaginons que le satellite soit lancé à la vitesse trouvée précédemment par un énorme canon ayant un tube vertical de 300 m de longueur. En supposant le mouvement uniformément accéléré à l'intérieur du tube, quelle serait l'accélération apparente à l'intérieur de la cabine? Conclure.

Contrôle n° 12. « FR 1 », satellite artificiel, avait une masse de 60 kg; une orbite sensiblement plane et circulaire, ayant pour centre celui de la Terre et située à l'altitude $h = 790$ km; une période de rotation autour de la Terre de 100 mn. Son mouvement est supposé uniforme. Calculer :

❶ Le rayon et la longueur de la trajectoire circulaire. Prendre comme rayon terrestre R = 6 360 km.

❷ A 10 m/s près, la vitesse linéaire v du satellite, en m/s et en km/h.

❸ Déterminer la force appliquée au centre de gravité du satellite et la calculer à 1 N près.

❹ En déduire l'accélération de la pesanteur à l'altitude du satellite : le satellite placé sur sa trajectoire avec la vitesse v n'est soumis qu'à son poids.

❺ Quelle est l'accélération apparente à l'intérieur du satellite? (D'après bac.)

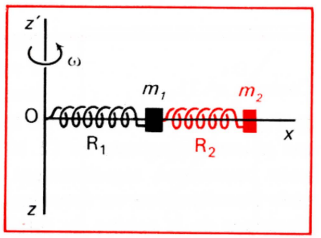
Contrôle n° 13. Au plafond d'une automobile est accroché un solide de masse m, par l'intermédiaire d'un fil inextensible de masse négligeable.

❶ La voiture démarre, sans vitesse initiale, sur une route rectiligne, horizontale. Le fil s'incline d'un angle α, constant. Dans quel sens? Déterminer le temps mis pour parcourir la distance l et la vitesse finale v.
Application numérique : $\alpha = 7°$; $l = 120$ m; $g = 9{,}8$ m/s².

❷ La voiture parcourt à la vitesse v, constante, une courbe horizontale de rayon r. De quel angle s'incline le pendule? Dans quelles direction?
Application numérique $r = 332$ m.

❸ On remplace le fil extensible par un fil élastique qui subit un allongement initial x_0 lorsqu'on accroche la masse m, la voiture étant immobile. Déterminer l'accroissement de l'allongement Δx lors du démarrage, puis lors de la négociation du virage. (On supposera Δx petit devant x_0.)
Application numérique : $x_0 = 4$ cm.

Contrôle n° 14. On dispose de deux ressorts R_1 et R_2 identiques, de masse négligeable, de longueur au repos $l_0 = 20$ cm, de raideur $k = 10$ N/m. On prendra $g = 10$ m/s².



❶ A un axe vertical zz' est soudée une tige ox horizontale. Sur cette tige ox on enfile le ressort R_1 (fixé par l'une de ses extrémités à o, par l'autre à une masse $m_1 = 20$ g, ponctuelle. On suppose que m_1 peut glisser le long de ox sans frottements.
Quel est l'allongement de R_1 lorsque le système tourne à 10 rd/s autour de zz'.

❷ A la suite de R_1 et m_1 on enfile le ressort R_2 (l'une de ses extrémités est fixée à m_1, l'autre à une masse ponctuelle $m_2 = 20$ g), m_2 glisse aussi sur ox sans frottements.
Quels sont les allongements de R_1 et R_2 lorsque l'ensemble tourne à 10 rd/s?

❸ Reprenons la question ❶ en supposant maintenant que la tige ox est inclinée de $\alpha = 30^0$ par rapport à l'horizontale et vers le bas. On calculera l'allongement de R_1 et la réaction exercée par la tige sur m_1.

❹ Le ressort R_1 et m_1 tournent autour de zz' (la tige ox est retirée). Le ressort décrit un cône de demi-angle au sommet α. Calculer la vitesse de rotation ω et l'allongement du ressort sachant que $\alpha = 66^0$ ($\cos 66^0 \simeq 0{,}4$).

❺ L'axe $z'z$ est maintenant horizontal, le système comprend la tige ox (perpendiculaire à $z'z$, donc tournant dans un plan vertical), le ressort R_1 et m_1. L'ensemble tourne à une vitesse constante ω. Calculer ω sachant que la tension du ressort est nulle lorsque m_1 passe par sa positon la plus élevée.
On admettra que m_1 est constamment en équilibre relatif.

Contrôle n° 15. Un électron de masse $m = 9.10^{-31}$ kg, lancé dans un champ magnétique uniforme, a un mouvement circulaire uniforme de rayon R = 9 cm.

❶ Sachant que la force magnétique centripète est $F = 10^{-15}$ N, calculer le rapport $\frac{F}{P}$ (P poids de l'électron, prendre $g = 10$ m/s²). Conclure.

❷ A quelle vitesse linéaire exprimée en km/s l'électron est-il lancé?

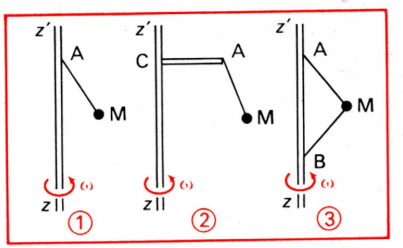
❸ Combien fait-il de tours par seconde?

❹ On annule instantanément le champ magnétique, que devient le mouvement de l'électron?

Contrôle n° 16. Une barre verticale zz' tourne sur elle-même à vitesse angulaire constante. On prendra $g = 10$ m/s².

❶ Un pendule AM est entraîné par cette tige AM = 1,5 m. La masse du point matériel M est 0,5 kg. A partir de quelle vitesse M se décolle-t-il de zz'?
Quel est l'angle entre AM et zz' et la tension du fil pour une vitesse de 1 tr/s? (Figure 1.)

❷ A la tige $z'z$ est soudée une tige CA horizontale de longueur CA = 1 m. Le pendule AM précédent est fixé au point A. Pour quelle vitesse de rotation le fil AM fait-il un angle de 45° avec la verticale? (Figure 2.) AM = 1,5 m.



❸ Soient deux points A et B de zz' tels que AB = 2,4 m.
M est relié à ces deux points par deux fils souples, inextensibles de longueur égale AM = BM = 1,5 m. La masse de M est toujours 0,5 kg. Quelles sont les tensions de AM et BM lorsque zz' tourne à 6 rd/s? (Figure 3.)

Contrôle n° 17.

❶ Un avion de masse 2 700 kg, partant du repos, parcourt la totalité de la plate-forme horizontale d'un porte-avions, supposé immobile, avant de décoller. La longueur de la piste d'envol étant 200 m et la vitesse en bout de piste étant 240 km par heure, évaluer, en supposant la force de propulsion constante et en négligeant frottements et résistance de l'air :

a) l'accélération du mouvement;

b) la durée du parcours;

c) l'intensité de la force de propulsion;

❷ Le même avion attaque à la vitesse de 720 km par heure un virage circulaire horizontal de 800 m de rayon. Calculer :

a) l'intensité de la force centripète qui maintient l'avion sur sa trajectoire;

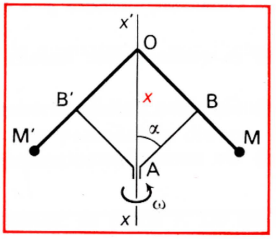
b) l'intensité de la force $\vec{R}$ représentant la résistance de l'air sur l'avion et l'inclinaison des ailes supposées planes sur le plan horizontal. On admettra que la force $\vec{R}$ est normale au plan des ailes. Une figure soignée est exigée.

❸ Calculer la vitesse maximale avec laquelle l'avion peut aborder le virage précédent, sachant que l'organisme humain ne peut supporter sans troubles une accélération supérieure à sept fois l'accélération de la pesanteur.

Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}8$ m/s². (Bac.)

Contrôle n° 18. Deux sphères de très faibles dimensions, chacune de masse $m = 200$ g, sont fixées aux extrémités de deux tiges OM et OM′ d'un losange articulé OB′AB, fixé en O à l'axe vertical xx', pouvant coulisser en A sans frottements.

OB = OB′ = AB′ = AB = 10 cm OM = OM′ = 20 cm.



❶ On néglige la masse des tiges et de l'anneau A. L'ensemble tourne autour de xx' à une vitesse ω (en rd/s). La longueur $OA = x$ varie avec ω. Déterminer x en fonction de ω. On prendra $g = 10$ m/s². Représenter graphiquement cette fonction en la limitant au domaine de variation de x. A commande l'arrivée de carburant (ou de vapeur) d'un moteur qui doit tourner à la vitesse moyenne de 10 rd/s. De combien se déplace A pour une variation relative de vitesse de 1/100?

❷ On néglige la masse des tiges, mais l'anneau A a en fait une masse $m' = 400$ g.

a) Evaluer la traction T exercée par AB sur A en fonction de α.

b) La tige OBM est en équilibre relatif : écrire que la somme des moments (du poids de M, de la force d'inertie centrifuge sur M, de la traction due à AB) est nulle. En déduire $x = OA$ en fonction de ω.

Théorème fondamental de la dynamique de rotation

■ **Conseils généraux**

Revoir les tableaux récapitulatifs de cinématique et dynamique. Physique pages 111 et 112.
Ne pas confondre moment de force et moment d'inertie.

---

n° 58. Une meule cylindrique homogène, de masse m, de rayon r est entraînée à l'aide d'une manivelle de longueur l, par une force $\vec{F}$ d'intensité constante, orthogonale à la manivelle.

ÉNONCÉ

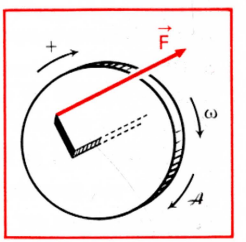
❶ Au bout de combien de temps, la meule, initialement immobile, a-t-elle acquis une vitesse de rotation égale à N tr/s ? On négligera les frottements.
Application numérique :

$m = 30$ kg $\quad r = 20$ cm $\quad l = 10$ cm $\quad F = 1$N $\quad N = 1$ tr/s.

CONSEIL

A partir du moment de $\vec{F}$ on déduira d'abord l'accélération angulaire $\mathscr{A}$.

CORRIGÉ



- *La meule est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction de l'axe $\vec{R}$, à la force $\vec{F}$. $\vec{P}$ et $\vec{R}$ passant par l'axe ont des moments nuls ; $\vec{F}$ étant orthogonale à la manivelle, le moment de $\vec{F}$, $\mathscr{M}_{\vec{F}} = F.l$.*
- *Le moment d'inertie de la meule est* $J = \frac{1}{2} mr^2$.
- *D'après la relation fondamentale de la dynamique de rotation*

$$\Sigma\overline{\mathscr{M}} = J\overline{\mathscr{A}} \Longrightarrow Fl = J\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{A} = \frac{Fl}{J}.$$

Le mouvement est donc uniformément accéléré

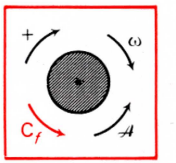
$$\frac{\Delta\overline{\omega}}{\Delta t} = \overline{\mathscr{A}} \Longrightarrow \Delta t = \frac{\omega}{\mathscr{A}} = \frac{2\pi N}{\mathscr{A}}.$$

- *Application numérique* $J = 0{,}6$ kg.m^2 $\quad \mathscr{A} = \frac{1}{6}$ rd/s^2 $\quad \Delta t = 38$ s.

ÉNONCÉ

❷ La meule, lancée à la vitesse de N tr/s, tourne librement, puis s'arrête après avoir effectué n tours. Déterminer le moment, supposé constant, du couple de frottements.
Application numérique $n =$ 190 tr.

CORRIGÉ



- *Là encore* $\Sigma\overline{\mathscr{M}} = J\overline{\mathscr{A}}$. *Soit* $\mathscr{M}$ *le moment du couple de frottement* C_f. *Prenons comme sens positif, le sens de rotation.*
$\Sigma\overline{\mathscr{M}} = -\mathscr{M}$. *Par suite*

$$-\mathscr{M} = J\overline{\mathscr{A}} \Longrightarrow \overline{\mathscr{A}} = -\frac{\mathscr{M}}{J}. \qquad (1)$$

Comme $\overline{\omega} > 0$ et $\overline{\mathscr{A}} < 0$ *le mouvement est uniformément retardé.*

CORRIGÉ

● *Le mouvement étant uniformément retardé* $\Delta(\omega^2) = 2\overline{\mathscr{A}}\,\Delta\theta$

$$\Delta(\omega^2) = 0 - \omega^2 \qquad \Delta\theta = 2\pi n$$

d'où $$\overline{\mathscr{A}} = \frac{-\omega^2}{4\pi \cdot n} = -\frac{4\pi^2 N^2}{4\pi n} = -\pi\frac{N^2}{n}. \quad (2)$$

● *D'après* (1) *et* (2) $\mathscr{M} = -J\overline{\mathscr{A}} = \frac{J\pi N^2}{n}$. *Application numérique :* $\mathscr{M} = 10^{-2}$ m.N.

ÉNONCÉ

❸ Corriger le résultat de la première question en tenant compte de ce moment de frottements.

CORRIGÉ

$\Sigma\overline{\mathscr{M}} = Fl - \mathscr{M}$, *$\mathscr{M}$ étant le moment du couple de frottements*

$$\Sigma\overline{\mathscr{M}} = J\overline{\mathscr{A}} \Longrightarrow \mathscr{A} = \frac{Fl - \mathscr{M}}{J} = \frac{0{,}1 - 0{,}01}{0{,}6} = 0{,}15 \text{ rd/s}^2.$$

Comme dans la 1re *question*

$$\Delta t = \frac{2\pi N}{\mathscr{A}} = \frac{2\pi}{0{,}15} \simeq 42 \text{ s}.$$

---

n° 59.

ÉNONCÉ

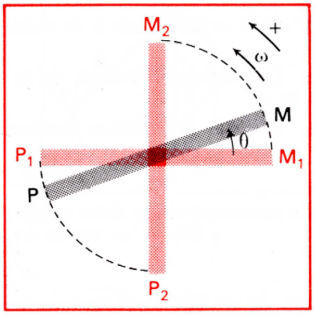
❶ Un pont tournant, doit pivoter de 90°. Il démarre de P_1M_1 sans vitesse initiale, avec une accélération angulaire constante, balayant 15° en 15 s. Puis il conserve sa vitesse, enfin il ralentit jusqu'à l'arrêt P_2M_2 en 15 s avec une décélération constante. Déterminer l'accélération et la décélération, ainsi que la durée du mouvement.

Le mouvement comprend trois phases. On choisit le sens du mouvement comme sens positif.

● 1re phase : *L'instant et la position du départ définissant les origines de temps et d'espace, l'équation horaire est*

$$\theta = \frac{1}{2}\overline{\mathscr{A}}t^2 \Longrightarrow \overline{\mathscr{A}} = \frac{2\theta}{t^2} = \frac{\pi}{15 \times 90} = 2{,}33 \cdot 10^{-3} \text{ rd/s}^2.$$

La vitesse finale est $\overline{\omega} = \overline{\mathscr{A}}t = \frac{\pi}{90}$ $(= 3{,}49 \cdot 10^{-2}$ rd/s).



● 2e phase : *La vitesse est constante et égale à*

$$\overline{\omega} = \frac{\pi}{90} \text{ rd/s}.$$

CORRIGÉ

● 3e phase : *Soit $\overline{\mathscr{A}}$ l'accélération de cette phase.*

$$\overline{\mathscr{A}} = \frac{\Delta\overline{\omega}}{\Delta t} = -\frac{\pi}{15 \times 90} = -2{,}33 \cdot 10^{-3} \text{ rd/s}^2.$$

Soit $\Delta\theta$ l'angle balayé pendant cette phase :

$$\Delta(\omega^2) = 2\overline{\mathscr{A}} \cdot \Delta\theta \Longrightarrow \Delta\theta = \frac{-\omega^2}{2\overline{\mathscr{A}}} = \frac{15\pi}{180} \text{ rd} \Longrightarrow \Delta\theta = 15°.$$

● *Reconsidérons la* 2e *phase. Soit $\Delta\theta$ l'angle balayé dans cette phase*

$$\Delta\theta = 90 - 15 - 15 = 60°,$$

le mouvement étant uniforme $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \overline{\omega}$,

d'où $$\Delta t = \frac{\pi \cdot 90}{3 \cdot \pi} = 30 \text{ s}.$$

● *La durée totale du mouvement est donc* $15 + 30 + 15 = 60$ s.

ÉNONCÉ

❷ Sachant que le moment d'inertie J de la partie mobile est égal à 10^7 kg.m², et que le moment $\mathcal{M}_r$, supposé constant, du couple résistant dû aux divers frottements est égal à 10^4m.N. Déterminer le moment $\mathcal{M}$ que doit excercer le dispositif d'entraînement au cours de chacune des phases du mouvement.

CORRIGÉ

● *Mesurons le moment $\mathcal{M}$ algébriquement (le sens positif étant toujours le sens du mouvement) :*

$$\Sigma\overline{\mathcal{M}} = \overline{\mathcal{M}} - \mathcal{M}_r.$$

● *D'après la relation fondamentale de la dynamique de rotation :*

$$\Sigma\overline{\mathcal{M}} = J\overline{\mathcal{A}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{M}} - \mathcal{M}_r = J\overline{\mathcal{A}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_r + J\overline{\mathcal{A}}.$$

● *pour la 1re phase :* $\overline{\mathcal{A}} = 2{,}33.10^{-3} \Longrightarrow \overline{\mathcal{M}} = 3{,}33.10^4$m.N

pour la 2e phase : $\overline{\mathcal{A}} = 0 \Longrightarrow \overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_r = 10^4$m.N

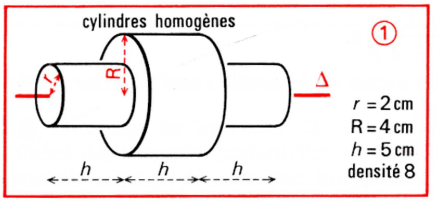
pour la 3e phase : $\overline{\mathcal{A}} = -2{,}33.10^{-3} \Longrightarrow \overline{\mathcal{M}} = -1{,}33.10^4$m.N

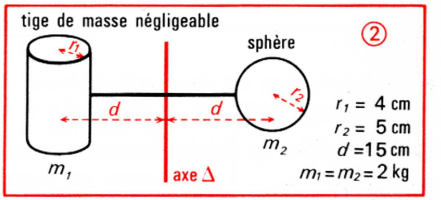
le dispositif d'entraînement doit freiner.

---

nº 60. Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation Δ des deux systèmes suivants :

ÉNONCÉ





CORRIGÉ

❶ *Découpons ce système en trois cylindres ayant pour axe de révolution l'axe Δ*

$$J = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2$$

$$m = \pi r^2 h\rho \qquad M = \pi R^2 h\rho.$$

● *Remarquons que la densité d'un solide ou d'un liquide* $d = \dfrac{\rho}{\rho_{eau}}$ *et qu'en unité* S.I. *la masse volumique de l'eau est* 1 000 kg/m³, *par suite* $\rho = 8\,000$ kg/m³.

$$J = \frac{\pi h\rho}{2}(2r^4 + R^4) = 1{,}8.10^{-3}\ \text{kg.m}^2.$$

❷ $J = J_c + J_s$. *J_c étant le moment d'inertie du cylindre, J_s de la sphère.*

● *Soit D_1 l'axe de révolution du cylindre, le cylindre par rapport à D_1 a le moment d'inertie* $\frac{1}{2}m_1r_1^2$. *D_1 passant par le centre de gravité du cylindre et étant parallèle à Δ, on peut appliquer le théorème de Huyghens*

d'où $J_c = \frac{1}{2}m_1r_1^2 + m_1d^2$.

● *De même en considérant le diamètre D_2 de la sphère parallèle à Δ*

$$J_s = \frac{2}{5}m_2r_2^2 + m_2d^2.$$

● $J = J_c + J_s = 9{,}36.10^{-2}\ \text{kg.m}^2$.

---

nº 61.

ÉNONCÉ

❶ Une machine d'Atwood est constituée par deux solides de masse M et M', retenus par un fil, inextensible, de masse négligeable, passant sans glisser sur une poulie de rayon *r*, dont la masse *m* est pratiquement répartie sur la jante. Déterminer l'accélération prise par M lorsqu'on laisse aller le système. On négligera les frottements.
Application numérique : M = 250 g M' = 200 g *r* = 10 cm *m* = 50 g
g = 10 m/s².

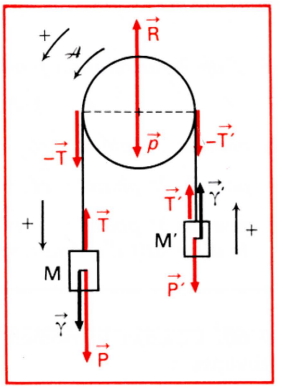
CONSEIL

Considérer successivement chacune des trois parties du système, appliquer le théorème du centre de gravité lorsqu'il y a translation, le théorème de la dynamique de rotation lorsqu'il y a rotation. On obtient ainsi trois équations qui permettent de déterminer γ.

ÉNONCÉ

● *Le solide* M *est soumis à son poids* $\vec{P}$ *et à la traction du fil* $\vec{T}$, *D'après le théorème du centre de gravité*

$$\vec{P} + \vec{T} = M\vec{\gamma} \Longrightarrow P - T = M\gamma \Longrightarrow T = P - M\gamma \quad (1)$$



● *De même, en considérant* M' :

$$T' = P' + M'\gamma' \quad (2)$$

● *La poulie est soumise à son poids* $\vec{p}$, *à la réaction de l'axe* $\vec{R}$, *aux forces* $-\vec{T}$ et $-\vec{T}'$.

$$\mathscr{M}_{\vec{p}} = \mathscr{M}_{\vec{R}} = 0 \qquad \overline{\mathscr{M}}_{-\vec{T}} = rT \qquad \overline{\mathscr{M}}_{-\vec{T}'} = -rT'.$$

D'après le théorème de la dynamique de rotation

$$\Sigma\overline{\mathscr{M}} = J\overline{\mathscr{A}} \Longrightarrow rT - rT' = J\mathscr{A} \quad (3)$$

● *Le fil est inextensible, il ne glisse pas, la périphérie de la poulie a donc la même vitesse* v *que les solides*

$$v = r\omega \Longrightarrow \gamma = \gamma' = r\mathscr{A} \quad (4)$$

● *En tenant compte de* (4), *en reportant* T *et* T' *dans* (3) *on en déduit*

$$\gamma = \frac{M - M'}{M + M' + J/r^2} g.$$

● *Le mouvement est donc uniformément varié. La masse de la poulie étant répartie sur la jante* $J = mr^2 \Longrightarrow J/r^2 = m. \Longrightarrow \gamma = 1\ m/s^2$.

ÉNONCÉ

❷ Déterminer la tension de chaque brin de fil.

CORRIGÉ

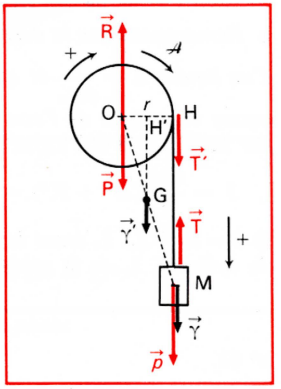
D'après (1) $T = M(g - \gamma) = 2{,}25$ N.
D'après (2) $T' = M'(g + \gamma') = M'(g + \gamma) = 2{,}20$ N.
On remarque que compte-tenu de son inertie, la poulie ne transmet pas intégralement la tension, il y a une « chute de tension » $T - T' = 0{,}05$ N.

---

n° 62.

ÉNONCÉ

❶ Sur un cylindre plein, de masse *m*, de rayon *r*, est enroulé un fil inextensible, de masse négligeable, qui soutient un solide M de même masse *m*. Le système est abandonné sans vitesse, le solide descend d'une hauteur *h*, faisant tourner le cylindre autour de son axe horizontal. Evaluer l'accélération et la durée du mouvement du solide. $m = 200$ g $\quad r = 10$ cm $\quad h = 30$ cm $\quad g = 10\ m/s^2$.



CORRIGÉ

● *Donnons une correction abrégée* (*voir n° 61,* ❶) :

— *étude de* M $\Longrightarrow T = p - m\gamma = mg - m\gamma \quad (1)$

— *étude du cylindre* $\Longrightarrow Tr = J\mathscr{A}$ *avec* $\mathscr{A} = \dfrac{\gamma}{r}$

— *d'où* $\gamma = \dfrac{mg}{m + J/r^2}$.

Comme $J = 1/2\ mr^2$ *(cylindre)* $\Longrightarrow \gamma = \dfrac{mg}{m + m/2} = \dfrac{2g}{3} = 6{,}7\ m/s^2$.

Le mouvement est uniformément accéléré donc $h = \dfrac{1}{2}\gamma t^2 \Longrightarrow t = 0{,}3$ s.

ÉNONCÉ

❷ Déterminer la réaction de l'axe.

CORRIGÉ

Le théorème de la dynamique de rotation ne permet pas d'en déduire la réaction $\vec{R}$ *de l'axe puisque le moment de* $\vec{R}$ *est nul. Appliquons au cylindre, le théorème du centre de gravité. Le centre de gravité étant fixe*

$$\vec{P} + \vec{T'} + \vec{R} = \vec{0} \qquad P + T' - R = 0 \Longrightarrow R = P + T'$$

Comme $T' = T = mg - m\gamma = mg - 2/3\ mg \Longrightarrow R = 4/3\ mg = 2{,}67$ N. *On remarquera que* R *n'est égale, ni au poids du cylindre, ni au poids total du système.*

ÉNONCÉ

❸ Déterminer de deux façons différentes l'accélération γ' du centre de gravité G du système (cylindre, solide).

CORRIGÉ

● 1re méthode. *Appliquons au système le théorème du centre de gravité : il y a trois forces extérieures* $\vec{R} + \vec{P} + \vec{p} = (m + m)\,\vec{\gamma'} \Longrightarrow 2mg - R = 2m\gamma' \Longrightarrow \gamma' = g/3 = 3{,}33\ m/s^2$.

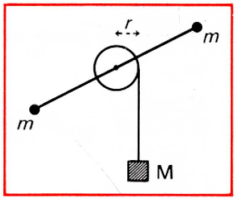
● 2e méthode. *Le cylindre et le solide ayant la même masse, le centre de gravité* G *est au milieu de* OM. *On voit sur la figure (triangles semblables) que* $H'G = 1/2\ HM$ *d'où en dérivant deux fois par rapport au temps* $\gamma' = 1/2\ \gamma = g/3 = 3{,}33\ m/s^2$.

---

n° 63.

ÉNONCÉ

❶ Une tige de longueur $2l$, aux extrémités de laquelle sont fixées deux masses ponctuelles m, est entraînée par un cylindre, mobile autour de son axe horizontal, sur lequel est enroulé un fil qui soutient une masse M. Le système est abandonné sans vitesse, étudier le mouvement de M. On donne $l = 20$ cm; $m = 50$ g; $M = 500$ g; $r = 5$ cm; $g = 10\ m/s^2$. Le moment d'inertie du système (cylindre, tige), sans les masses m est $J_0 = 10^{-3}\ kg.m^2$. On néglige les frottements.



CORRIGÉ

Donnons une correction abrégée (voir 61, ❶) :

— *étude de* $M \Longrightarrow \vec{P} + \vec{T} = M\vec{\gamma} \Longrightarrow P - T = M\gamma \Longrightarrow T = Mg - M\gamma$ (1)

— *étude de la partie tournante : remarquons que les poids des masses* m *ont des moments qui s'annulent.* $\Sigma\mathcal{M} = J\overline{\mathcal{A}} \Longrightarrow Tr = J\overline{\mathcal{A}}$.

Le moment d'inertie de la partie tournante $J = J_0 + 2\ ml^2 = 5.10^{-3}\ kg.m^2$.

— $\gamma = r\mathcal{A}$ *(car le fil est inextensible et ne glisse pas dans la gorge de la poulie).*

— *D'où* $\gamma = \dfrac{M}{M + J/r^2}\,g = 2\ m/s^2$: *le mouvement est uniformément accéléré.*

ÉNONCÉ

❷ Quelle est la vitesse des masses m lorsque la tige a effectué un tour?

CORRIGÉ

La tige a un mouvement de rotation d'accélération $\mathcal{A} = \dfrac{\gamma}{r} = 40\ rd/s^2$, *le mouvement est donc uniformément accéléré :* $\Delta(\omega^2) = 2\mathcal{A}\Delta\theta$ *avec* $\Delta\theta = 2\pi rd$; $\Delta(\omega^2) = \omega^2 - 0$. *Par suite* $\omega^2 = 2\mathcal{A}.\Delta\theta = 160\pi \Longrightarrow \omega = \sqrt{160\pi}\ rd/s$.

La vitesse v *de la masse* m *est reliée à* ω *par* $v = l\omega \Longrightarrow v = 4{,}46\ m/s$.

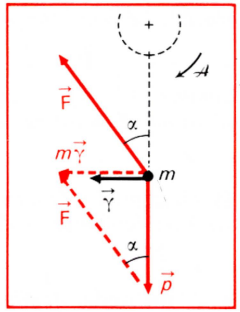
ÉNONCÉ

❸ Au démarrage, à vitesse nulle, la tige était verticale. Calculer à l'instant du départ, la force $\vec{F}$ exercée par la tige sur la masse inférieure.

CORRIGÉ

● *La vitesse initiale est nulle, donc l'accélération normale*

$$\gamma_n = \frac{v^2}{r} = 0, \text{ par suite } \vec{\gamma} = \vec{\gamma_t} \ (\gamma_t = l\mathcal{A} = 8 \text{ m/s}^2).$$



● *La masse* m *est soumise à son poids* $\vec{p}$ *et à l'action* $\vec{F}$ *de la tige* $\vec{F} + \vec{p} = m\vec{\gamma} \Longrightarrow \vec{F} = m\vec{\gamma} - \vec{p}$. *Comme* $\vec{\gamma} \perp \vec{p}$, *on en déduit,* α *étant l'angle entre* F *et la verticale :*

$$\text{tg}\alpha = \frac{m\gamma}{p} = \frac{\gamma}{g} = 0{,}8 \Longrightarrow \alpha = 38°40'.$$

D'autre part $\cos\alpha = \frac{p}{F} \Longrightarrow F = \frac{p}{\cos\alpha} = 0{,}64$ N.

ÉNONCÉ

❹ En fait, l'axe du cylindre subit un couple de frottements de moment constant, $\mathcal{M} = 0{,}01$ m.N. Quelle erreur relative en résulte-t-il sur la valeur de l'accélération trouvée au ❶ ?

CONSEIL

Mettre γ sous la forme $\frac{u}{v}$. Faire un calcul de petites variations.

CORRIGÉ

● *Soit* γ' *la valeur exacte de l'accélération.*

— *Pour* M *rien n'est changé :* $T = Mg - M\gamma'$ (1)

— *Pour la partie tournante :* $Tr - \mathcal{M} = J\mathcal{A}$ (2)

$\gamma' = r\mathcal{A}$ *finalement :* $\gamma' = \dfrac{Mg - \dfrac{\mathcal{M}}{r}}{M + \dfrac{J}{r^2}}$

● *Posons* $\gamma = \frac{u}{v}$, *on passe de la valeur exacte,* γ', *à la valeur approchée,* γ, *par la variation*

$$\delta u = \frac{\mathcal{M}}{r}.$$

D'où l'erreur relative : $\frac{\delta\gamma}{\gamma} = \frac{\delta u}{u} = \frac{\mathcal{M}}{Mgr} = \frac{0{,}01}{0{,}5 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = \frac{4}{100}$

L'erreur est positive, la valeur calculée sans tenir compte des frottements est approchée par excès.

Mouvement de rotation sinusoïdale

Pb 14

■ **Conseils généraux**

Ne pas confondre la pulsation ω (en rd/s, constant, positif), et la vitesse angulaire $\overline{\Omega}$ (en rd/s, fonction du temps, nombre algébrique).

ÉNONCÉ

n° 64. Un fil de torsion vertical AO est fixé en O à une barre CD (OC = OD = 30 cm). On écarte la barre CD de sa position d'équilibre d'un angle de 40°, dans un sens que nous prendrons comme positif, et on la laisse aller à l'instant $t = 0$ sans vitesse initiale. Sa période d'oscillation est égale à 1 s. On pourra prendre $\pi^2 \simeq 10$.

❶ Quelle est l'équation horaire du mouvement?

CONSEIL

Ne pas oublier que pour un pendule de torsion, le mouvement est de rotation sinusoïdale, quelle que soit l'amplitude.

CORRIGÉ

Soit θ *l'élongation angulaire de* CD *mesurée à partir de la position d'équilibre de* CD. *Le mouvement étant sinusoïdal* $\theta = \alpha \sin(\omega t + \varphi)$,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \text{ rd/s} \qquad \alpha = \frac{\pi}{180} \times 40 = \frac{2\pi}{9} \text{ rd} \simeq 0{,}7 \text{ rd}.$$

A l'instant $t = 0$ $\quad \theta = \alpha \Longrightarrow \alpha \sin\varphi = \alpha \Longrightarrow \sin\varphi = 1 \Longrightarrow \varphi = \pi/2$.
D'où l'équation horaire $\theta = 0{,}7 \sin(2\pi t + \pi/2) = 0{,}7 \cos 2\pi t$.

ÉNONCÉ

❷ Quelle est la vitesse angulaire maximale de CD?

CORRIGÉ

$\overline{\Omega} = \theta' = -0{,}7 \times 2\pi \sin 2\pi t$. *La vitesse maximale, en module est* $0{,}7 \times 2\pi = 4{,}4$ rd/s (*pour* $|-\sin 2\pi t| = 1$).

ÉNONCÉ

❸ Quelle est l'accélération angulaire lorsque le pendule est écarté de 30° dans le sens négatif?

CORRIGÉ

$\theta = \alpha \sin(\omega t + \varphi) \Longrightarrow \overline{\Omega} = \alpha\,\omega \cos(\omega t + \varphi) \Longrightarrow \overline{\mathscr{A}} = \overline{\Omega'} = -\alpha\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$,
par suite l'accélération angulaire $\overline{\mathscr{A}}$ *est liée à* θ *par* $\overline{\mathscr{A}} = -\omega^2\theta$

Pour $\theta = -\frac{\pi}{6}$ *calculons* $\overline{\mathscr{A}}$: $\overline{\mathscr{A}} = -4\pi^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) \simeq 21$ rd/s².

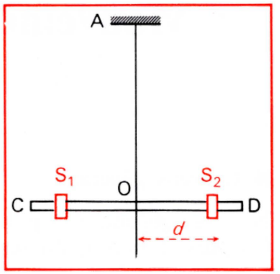
ÉNONCÉ

❹ On surcharge la barre CD de deux masselottes ponctuelles S_1 et S_2 de masse $m = 75$ g. S_1 et S_2 seront toujours fixées à égale distance d de O. On s'arrange pour que la période d'oscillation soit égale à 2 s, ceci est réalisé pour $d = 20$ cm. En déduire la constante de torsion du fil et le moment d'inertie J_0 de la barre CD non surchargée.

CORRIGÉ

Lorsque la barre non surchargée oscille

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{C}} = 1 \qquad (1)$$



Lorsque la barre est surchargée de S_1 *et* S_2 *située à* $d = 20$ cm, *son moment d'inertie devient* $J = J_0 + 2md^2$, *sa période*

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + 2md^2}{C}} = 2 \qquad (2)$$

Faisons le rapport $\frac{(2)}{(1)} \Longrightarrow \sqrt{\frac{J_0 + 2\,md^2}{J_0}} = 2 \Longrightarrow J_0 + 2\,md^2 = 4\,J_0 \Longrightarrow 3\,J_0 = 2md^2,$

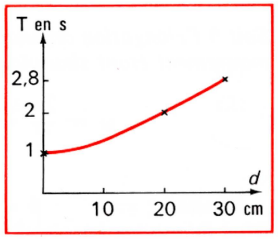
d'où $$J_0 = \frac{2\,md^2}{3} = \frac{2 \times 0{,}075 \times 4.10^{-2}}{3} = 2.10^{-3}\ \text{kg.m}^2.$$

Reportons dans (1)

$$\frac{J_0}{C} = \frac{1}{4\pi^2} = \frac{1}{40} \Longrightarrow C = 40\,J_0 = 8.10^{-2}\ \text{m.N/rd}.$$

ÉNONCÉ

❺ Etudier comment varie T en fonction de d et représenter graphiquement.



CORRIGÉ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2 \times 10^{-3} + 2 \times 0{,}075\ d^2}{8.10^{-2}}} = \pi\sqrt{0{,}1 + 7{,}5\ d^2}.$$

Lorsque d *passe de* 0 *à* 30 cm, T *augmente de* 1 s *à*

$T = \pi\sqrt{0{,}1 + 7{,}5 \times 9.10^{-2}} \simeq 2{,}8$ s. *(Ne pas oublier pour* $d = 20$ cm $T = 2$ s).

ÉNONCÉ

❻ On admettra que la constante de torsion du fil est inversement proportionnelle à sa longueur. On diminue la longueur du fil OA du quart de sa valeur, que devient la période de la barre non surchargée ?

CONSEIL

La variation relative de longueur est trop grande pour qu'on puisse utiliser les théorèmes des petites variations.

Soit C′ *la nouvelle constante de torsion correspondant à la longueur* OA′

$$\frac{C'}{C} = \frac{OA}{OA'} \Longrightarrow C' = C \times \frac{4}{3}.$$

Par suite la nouvelle période

CORRIGÉ

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{C'}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 \times 3}{C \times 4}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{C}} \times \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}87\ \text{s}$$

Contrôle n° 1. Une toupie est constituée par une sphère de masse M, de rayon R, traversée par un axe de masse négligeable de diamètre D. $M = 100$ g $R = 3{,}7$ cm $D = 4$ mm.

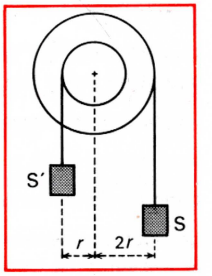
1. Elle est mise en rotation à la vitesse de 300 tr/mn, en une seconde. Déterminer l'intensité F, des deux forces horizontales, constituant un couple, appliquées sur l'axe. On supposera F constant pendant la seconde du lancement. Le moment d'inertie d'une sphère par rapport à l'un de ses diamètres est $J = 2/5\ M\ R^2$.
2. En combien de tours s'est fait le lancement?
3. La toupie après sa mise en rotation est posée sur le sol, elle cesse de tourner après avoir accompli 500 tours. Déterminer le moment $\mathcal{M}$ du couple de frottements, supposé constant.

Contrôle n° 2. Sur la gorge d'une poulie de masse 100 g, de rayon $r = 6$ cm, mobile sans frottements autour d'un axe horizontal, passe un fil de masse négligeable. Ce fil porte une masse $M = 300$ g et une masse $m = 100$ g. On suppose toute la masse de la poulie répartie à la périphérie. La masse M se trouve à 3 m au-dessus du sol; la masse m est au niveau du sol sans toutefois y reposer. On abandonne le système au temps 0. $g = 9{,}8$ m/s².

1. Quelle est l'équation horaire de M?
2. Calculer la tension de chaque brin de fil pendant le mouvement.
3. Calculer la vitesse de M quand elle arrive au sol.
4. Quelle est alors la vitesse angulaire de la poulie? Quelle force $\vec{F}$ faut-il appliquer tangentiellement à la poulie pour qu'elle s'arrête au bout de 6 tours, le fil supportant m étant coupé quand M arrive au sol? (D'après bac.)

Contrôle n° 3.

1. Sur un cylindre de rayon $2r$, de moment d'inertie J, mobile, sans frottements, autour de son axe de révolution, horizontal, est enroulé un fil souple, inextensible. Ce fil soutient un solide S de masse m. Le système est abandonné sans vitesse, étudier le mouvement du solide. Quel temps met-il pour descendre d'une hauteur h?
Application numérique :
$2r = 20$ cm; $J = 4.10^{-3}$ kg·m²; $m = 100$ g; $g = 10$ m/s²; $h = 1{,}6$ m.

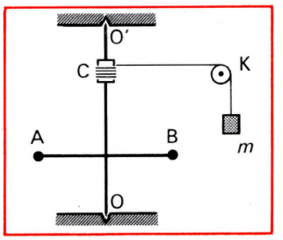


2. Un second cylindre, de rayon r, de même moment d'inertie J, est fixé suivant l'axe du premier; les deux cylindres tournent solidairement. Il soutient par l'intermédiaire d'un fil un solide S' de masse m. Le système est abandonné sans vitesse.
Dans quels sens vont se déplacer les solides S et S'?
Etudier le mouvement de S.
Quel temps met-il pour descendre d'une hauteur h?
Faire l'application numérique.

Contrôle n° 4. Soit un fil de torsion vertical AB, de longueur AB = 1 m, attaché en A à un point fixe. On admettra que la constante de torsion de ce fil est donnée par la formule $C = \frac{8.10^{-2}}{l}$ en uSI, l étant la longueur du fil subissant la torsion.
En un point M de AB situé à $AM = x$ du point fixe A, on fixe une barre horizontale de moment d'inertie $J = 2.10^{-2}$ kg·m².

1. L'extrémité B du fil est libre. Comment varie la période d'oscillation du pendule en fonction de x. Représenter la courbe $T^2 = f(x)$.
2. L'extrémité B du fil est attachée à un point fixe lorsque le fil ne subit aucune torsion. Comment varie la période d'oscillation du pendule en fonction de x. Représenter la courbe $T^2 = f(x)$.

Contrôle n° 5. Le système étudié (voir figure) comprend une tige oo' de masse négligeable, mobile sur elle-même, sans frottements; une tige AB de masse $M = 0{,}3$ kg, de longueur $2l = 40$ cm; aux extrémités de A et B, sont fixées deux masses ponctuelles $\mu = 25$ g chacune; un cylindre homogène c, de masse $M' = 0{,}2$ kg, de rayon $r = 3$ cm; la masse $m = 0{,}1$ kg, la poulie K est de masse négligeable.



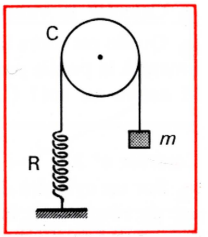
❶ Calculer le moment d'inertie J de la partie tournant autour de oo'. (Le moment d'inertie de AB est égal à $\frac{Ml^2}{3}$).

❷ Montrer que le mouvement de m est uniformément varié. Calculer l'accélération angulaire de la partie tournante. $g = 9{,}8$ m/s².

❸ Calculer la tension du fil. La vitesse de m après 1 m de chute, m ayant été abandonné sans vitesse initiale. Quelle est alors la vitesse de B?

❹ On se propose de calculer J par une autre méthode expérimentale. Pour cela on coupe le fil et l'on soude sur l'axe oo' l'extrémité d'un ressort spiral qui fournit un couple de rappel, égal, en valeur absolue à $C|\theta|$, θ étant l'angle de AB avec sa position d'équilibre A_0B_0. Les deux surcharges de masse μ étant enlevées, la période d'oscillation du système est $T = 2$ s. Les deux surcharges de masse $\mu = 25$ g chacune étant en place, la période du système est 2,44 s. Calculer le moment d'inertie J du système avec surcharges et la constante de rappel C. (D'après bac.)

Contrôle n° 6. Un fil de masse négligeable entraîne sans glissement un cylindre homogène C de masse $M = 600$ g, mobile autour de son axe de révolution horizontal. L'une des extrémités du fil tient une masse $m = 0{,}2$ kg, l'autre extrémité est reliée à un ressort vertical R lié au sol, de raideur $k = 50$ N/m.



❶ Quel est l'allongement du ressort à l'équilibre?

❷ On écarte verticalement m vers le bas de 1 cm, et on la laisse aller sans vitesse initiale. Quelle est l'équation horaire de m?

Contrôle n° 7. Un fil de torsion vertical a pour longueur L, son extrémité supérieure est attachée à un point fixe, son extrémité inférieure est soudée au milieu d'une barre horizontale de longueur $2l$ de masse m. La constante de torsion du fil est donnée par la formule $C = \frac{\mu d^4}{L}$, d: diamètre du fil, μ constante que nous supposerons indépendante de la température. Le moment d'inertie de la barre est $\frac{ml^2}{3}$.

❶ Sachant que $m = 300$ g, que $l = 10$ cm, que la durée de 100 oscillations est 120 s, en déduire la constante de torsion du fil.

❷ Dans l'expérience précédente, la longueur L du fil de torsion était égale à 100 cm. Quelle longueur L' doit-on donner au fil de torsion pour que la période soit 1 seconde.

❸ La longueur du fil étant L', on surcharge la barre de 2 masses ponctuelles m' situées à l du fil de torsion. Calculer m' sachant que la période redevient celle de la première question.

❹ On suppose que le fil de torsion et la barre non surchargée ont même coefficient de dilatation linéaire $\lambda = 2.10^{-5}$ °C^{-1}. La température augmentant de 10 °C, quelle est la variation relative de période? Sachant qu'on mesure le temps à 0,2 s près, pendant combien de temps faudrait-il compter des oscillations pour détecter cette variation? Est-ce possible?

Travail - Energie cinétique

■ Conseils généraux

Le théorème de l'énergie cinétique s'applique entre deux états 1 et 2 qu'il faudra bien définir. Il importe de bien compter les travaux algébriquement.
Il est évident que les exercices proposés peuvent être parfois résolus sans faire intervenir l'énergie cinétique.

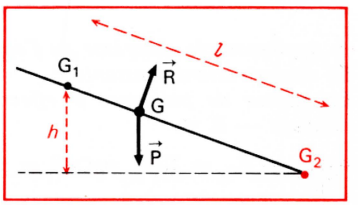
---

n° 65.

ÉNONCÉ

❶ Parti sans vitesse, un skieur de masse m descend le long d'une pente de longueur l, la dénivellation est h. Evaluer son énergie cinétique et sa vitesse v lorsqu'il est au bas de la pente. On donne $m = 80$ kg $\quad l = 300$ m $\quad h = 50$ m $\quad g = 10$ m/s².

CORRIGÉ



● *Le skieur est en translation, son énergie cinétique est donc* $\frac{1}{2}mv^2$, *les forces intérieures effectuent un travail nul.*

● *Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre le départ* $(E_{c_1} = 0)$ *et l'arrivée* $\left(E_{c_2} = \frac{1}{2}mv^2\right)$.

En négligeant les frottements le skieur est soumis à deux forces, son poids $\vec{P}$ *et la réaction du sol* $\vec{R}$. *Lors de la descente les travaux effectués sont* $\overline{W_{\vec{P}}} = P.h$, $\overline{W_{\vec{R}}} = 0$.

● *Comme* $\quad \Sigma \overline{W} = E_{c_2} - E_c \Longrightarrow Ph = \frac{1}{2}mv^2 \Longrightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2$.

L'énergie cinétique acquise est donc $mgh = 4.10^4$ J, *la vitesse* $v = \sqrt{2gh} = 32$ m/s.

ÉNONCÉ

❷ En fait, la vitesse acquise au cours de la descente n'est que $v' = 72$ km/h. En déduire la force $\vec{F}$ opposée au mouvement due aux diverses résistances.

CORRIGÉ

La force $\vec{F}$, *supposée constante en module, parallèle à la pente, effectue au cours de la descente le travail* $\overline{W_{\vec{F}}} = -F.l$ *(c'est un travail résistant).*
Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les deux états : départ et arrivée.

$$E_{c_2} - E_{c_1} = \overline{W_{\vec{P}}} + \overline{W_{\vec{F}}} \Longrightarrow \frac{1}{2}mv'^2 = Ph - Fl.$$

D'où

$$Fl = Ph - \frac{1}{2}mv'^2 \Longrightarrow F = \frac{mgh}{l} - \frac{mv'^2}{2l} = 80\text{N}.$$

---

n° 66. Dans tout le problème les résistances sont équivalentes à une force $\vec{R}$ opposée au mouvement. $R = 1\,800$ N, $g = 10$ m/s².

ÉNONCÉ

❶ Une automobile de masse $m = 800$ kg, initialement immobile, démarre sur une route rectiligne horizontale. Après avoir parcouru la distance $e = 200$ m, elle a acquis la vitesse $v = 108$ km/h. Quel est le travail effectué par le moteur au cours du démarrage ?

CONSEIL

Remarquer que le théorème de l'énergie cinétique permet de calculer le travail du moteur que la force de traction soit ou ne soit pas constante. Pour faire la même question avec le théorème du centre de gravité il faudrait supposer la force de traction constante.

CORRIGÉ

● *Appliquons à la voiture le théorème de l'énergie cinétique entre l'état* 1 *(le départ,* $E_{c_1} = 0$*) et l'état* 2 (200 m *après,* $E_{c_2} = \frac{1}{2} mv^2$). *Entre ces deux états la voiture est soumise à quatre forces extérieures : son poids* $\vec{P}$ *qui ne travaille pas car est perpendiculaire au déplacement, la réaction du sol qui ne travaille pas non plus pour la même raison, la résistance* $\vec{R}$ *qui effectue le travail résistant —* Re, *la force de traction* $\vec{F}$ *qui effectue le travail moteur* $\overline{W_F^{\rightarrow}}$ *que nous cherchons.*

● $E_{c_2} - E_{c_1} = \Sigma \overline{W} \Longrightarrow \frac{1}{2} mv^2 = -Re + \overline{W_F^{\rightarrow}} \Longrightarrow \overline{W_F^{\rightarrow}} = \frac{1}{2} mv^2 + Re = 7{,}2.10^5 J.$

ÉNONCÉ

❷ La voiture conserve ensuite cette vitesse *v*. Quelle puissance le moteur doit-il développer pour maintenir cette vitesse ?

CORRIGÉ

● *Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre deux états séparés de* t *secondes. La vitesse restant constante* $E_{c_2} = E_{c_1}$, *la distance parcourue est* vt.
Le moteur de puissance $\mathcal{P}$ *effectue le travail* $\mathcal{P}$t. *La résistance* R *effectue le travail résistant —* R vt.

● $E_{c_2} - E_{c_1} = \Sigma \overline{W} \Longrightarrow 0 = \mathcal{P}t - R\,vt \Longrightarrow \mathcal{P} = Rv = 5{,}4.10^4$ W.

ÉNONCÉ

❸ L'automobile monte une côte de pente 2,5 %, avec cette même vitesse *v*. Quelle doit-être alors la puissance du moteur ?

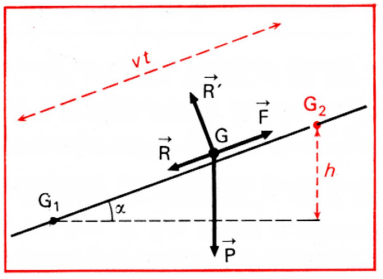
CORRIGÉ

● *Soit deux états séparés de* t.*secondes c'est-à-dire de* vt *mètres*

$\overline{W_{R'}^{\rightarrow}} = 0$ $\overline{W_R^{\rightarrow}} = -Rvt$ $\overline{W_F^{\rightarrow}} = \mathcal{P}t$

$\mathcal{P}$ *étant la puissance demandée.*

$\overline{W_P^{\rightarrow}} = -Ph$ *avec* $h = vt \sin \alpha$ ($\sin \alpha$ *est la pente*).



● $E_{c_2} - E_{c_1} = \Sigma \overline{W}$

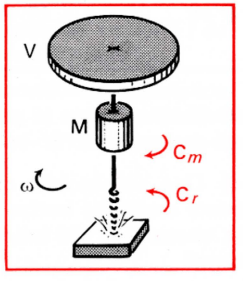
$\Longrightarrow 0 = -Rvt + \mathcal{P}t - Pvt \sin \alpha$

d'où

$\mathcal{P} = v(R + mg \sin \alpha) = 6.10^4$ W.

ÉNONCÉ

n° 67. Une perceuse comprend un moteur M dont l'arbre entraîne une mèche et un volant V. Le moment d'inertie J de l'ensemble de la partie tournante est $J = 3.10^{-2}$ kg.m².



❶ Au démarrage le moment du couple moteur est $\mathcal{M}$, il n'y a pratiquement pas de résistances. Quelle est l'accélération angulaire ? Quelle serait cette accélération angulaire s'il n'y avait pas le volant, dont le moment d'inertie représente les 90 % du moment d'inertie de l'ensemble ? Au démarrage le moment $\mathcal{M} = 1$ m.N (cette valeur ne doit plus être conservée pour la suite).

CORRIGÉ

• *Appliquons la relation fondamentale de la dynamique de rotation :*

$$\mathcal{M} = J\mathcal{A} . \Longrightarrow \mathcal{A} = \frac{\mathcal{M}}{J}$$

• Remarque : *nous aurions pu utiliser le théorème de l'énergie cinétique entre le départ* ($E_{c_1} = 0$) *et un état* 2 *atteint* θ rd *après* ($E_{c_2} = \frac{1}{2} J\omega^2$). *Seul le moment du couple moteur travaille* $\Sigma\overline{W} = \mathcal{M} . \theta = \frac{1}{2} J\omega^2$ $\quad \mathcal{M} = J\frac{\omega^2}{2\theta} = J\mathcal{A}$ *puisque* $\omega^2 = 2\mathcal{A} . \theta$.

• *Application numérique : avec le volant* $\mathcal{A}_1 = 33$ rd/s²; *sans le volant le moment d'inertie est* $J = 3.10^{-3}$, $\mathcal{A}_2 = 333$ rd/s² : *le volant modère donc l'accélération c'est-à-dire les variations de vitesse.*

ÉNONCÉ

❷ Soit $\mathcal{P}$ la puissance du moteur, que nous supposerons constante pour un régime d'utilisation normale, et égale à 0,4 kW. Pendant un intervalle de temps $\Delta t = 0{,}5$ s, la mèche perce un trou : la vitesse de rotation diminue de 32 tr/s à 28 tr/s. Quel est le travail des forces résistantes? Calculer le moment moyen du couple moteur $\mathcal{M}_m$ et du couple résistant $\mathcal{M}_r$. $\quad \pi^2 = 10$.

CORRIGÉ

• *Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre l'état* 1 ($\omega_1 = 32$ tr/s $E_{c_1} = \frac{1}{2} J\omega_1^2$) *et l'état* 2 ($\omega_2 = 28$ tr/s $E_{c_2} = \frac{1}{2} J\omega_2^2$)

$$\Delta E_c = E_{c_2} - E_{c_1} = \frac{1}{2} J(\omega_2^2 - \omega_1^2) = \frac{J(\omega_2 + \omega_1)}{2}(\omega_2 - \omega_1) = J\omega_m \Delta\omega \quad (\omega_m = 30 \text{ tr/s}).$$

Pendant l'intervalle de temps Δt, *le moteur effectue le travail moteur* $\mathcal{P}\Delta t$, *soit* $\overline{W}_r$ *le travail résistant demandé* ($\overline{W}_r < 0$).

• $E_{c_2} - E_{c_1} = \Sigma\overline{W} \Longrightarrow J\omega_m\Delta\omega = \mathcal{P}\Delta t + \overline{W}_r$, *d'où* $\overline{W}_r = J\omega_m\Delta\omega - \mathcal{P}\Delta t$.

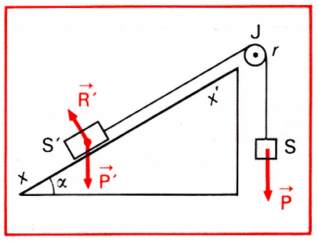
$\Delta\omega = -8\pi$ rd/s; $\omega_m = 60\pi$ rd/s, *d'où* $\overline{W}_r = -344$ J.

• $W_r = \mathcal{M}_r\Delta\theta$; $\Delta\theta \simeq \omega_m . \Delta t \Longrightarrow \mathcal{M}_r = \frac{344}{60\pi . 0{,}5} \simeq 3{,}65$ m.N

$$\mathcal{M}_m \simeq \frac{\mathcal{P}}{\omega_m} = \frac{400}{60\pi} \simeq 2{,}1 \text{ m.N.}$$

ÉNONCÉ

n° 68. Une machine d'Atwood est constituée par une poulie de moment d'inertie J, de rayon r, sur laquelle passe un fil qui retient deux solides S et S′ de masses m et m' ($m > m'$). S′ glisse sur un plan incliné de ligne de plus grande pente xx' inclinée de $\alpha = 30^0$ par rapport à l'horizontale. On laisse aller le système sans vitesse, S prend un mouvement vertical, descendant. $\quad m = 80$ g $\quad m' = 60$ g $\quad r = 10$ cm $\quad J = 6.10^{-4}$ kg.m² $\quad g = 10$ m/s².



❶ Quelle est la nature du mouvement de S, évaluer son accélération. On suppose dans cette question tous les frottements négligeables.

CONSEIL

On admettra que si le fil inextensible, parfaitement souple, ne glisse pas sur la poulie, le travail total des forces intérieures de ce système déformable est nul.

On peut étudier ce système en faisant intervenir les tensions. Donnons une solution utilisant le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble du système.

- Etat 1 : *le démarrage du système à vitesse nulle* $\Longrightarrow E_{c_1} = 0$.
- Etat 2 : S *est descendu de* x *mètres et a la vitesse* v. *Il s'ensuit : le fil étant inextensible que* S' *a glissé de* x *mètres et a aussi la vitesse* v; *le fil ne glissant pas dans la gorge de la poulie celle-ci a la vitesse* $\omega = \frac{v}{r}$.

Par suite $E_{c_2} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m' v^2 + \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{v^2}{2}\left(m + m' + \frac{J}{r^2}\right)$

- *Evaluons les travaux.* $\overline{W}_{\vec{P}} = mgx \qquad \overline{W}_{\vec{R}'} = 0 \qquad \overline{W}_{\vec{P}'} = -m'gh = -m'gx \sin\alpha$.

CORRIGÉ

- *D'après le théorème de l'énergie cinétique* $E_{c_2} - E_{c_1} = \Sigma\overline{W}$:

$$\frac{v^2}{2}\left(m + m' + \frac{J}{r^2}\right) = x(mg - m'g \sin\alpha) \qquad (1)$$

— 1re solution : v^2 *est proportionnel à* x *: le mouvement est donc uniformément accéléré :* $v^2 = 2\gamma x$ *d'où*

$$\gamma = \frac{v^2}{2x} = \frac{m - m' \sin\alpha}{m + m' + J/r^2} g = 2{,}5 \text{ m/s}^2.$$

— 2e solution : *dérivons* (1) *par rapport au temps en remarquant que* $\frac{dx}{dt} = v$ *et que* $\frac{dv}{dt} = \gamma$

$$\frac{2v\gamma}{2}\left(m + m' + \frac{J}{r^2}\right) = v(mg - m'g \sin\alpha) \text{ d'où } \gamma.$$

ÉNONCÉ

❷ En fait après un mètre de chute, S a la vitesse $v = 2$ m/s. Calculer le travail résistant W_r dû aux diverses résistances.

ÉNONCÉ

- Etat 1 : *démarrage du système à vitesse nulle* $\Longrightarrow E_{c_1} = 0$.
- Etat 2 : S *a la vitesse* 2 m/s. $E_{c_2} = \frac{v^2}{2}\left(m + m' + \frac{J}{r^2}\right) = 0{,}4$ J.
- $\Sigma\overline{W} = mgx - m'gx \sin\alpha - W_r$, W_r *étant la mesure arithmétique du travail résistant demandé. Comme* $x = 1$ m $\Sigma\overline{W} = 0{,}5 - W_r$.
- $E_{c_2} - E_{c_1} = \Sigma\overline{W} \Longrightarrow 0{,}4 = 0{,}5 - W_r \Longrightarrow W_r = 0{,}1$ J.

ÉNONCÉ

n° 69. Une bille homogène roule, sans glisser, le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné de α sur le plan horizontal. Quel est son mouvement? Déterminer l'accélération de son centre.

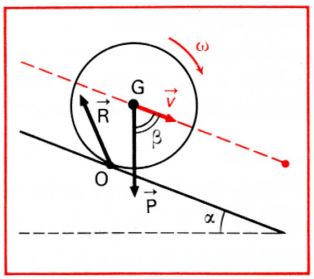
CONSEIL

La réaction $\vec{R}$ du plan incliné est oblique (c'est-à-dire comporte une composante tangentielle de frottement) de façon à éviter le glissement. $\vec{R}$ s'applique sur un point de la bille dont la vitesse est nulle à chaque instant. Cette immobilité du point de contact avec le sol s'observe d'ailleurs très facilement sur un véhicule à chenilles : la partie de chenille en contact avec le sol ne bouge pas. La puissance développée par $\vec{R}$ $(\vec{R}.\vec{v})$ et le travail effectué sont donc nuls.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à la bille :

- Etat 1 : *le démarrage à vitesse nulle* $E_{c_1} = 0$.

- Etat 2 : *le centre de gravité* G *de la bille s'est déplacé de* x *mètres. La bille est alors animée d'un mouvement de translation le long de la plus grande pente à vitesse* v *(celle de son centre de gravité), et d'un mouvement de rotation autour d'un axe passant par son centre de gravité* G, *perpendiculaire au plan de la figure, soit* ω *la vitesse de rotation. Le roulement se faisant sans glissement* $v = r\omega$ *(voir exercice 29).*



Par suite $E_{c_2} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{v^2}{2}\left(m + \frac{J}{r^2}\right)$.

Comme $J = \frac{2}{5} m r^2 \Longrightarrow E_{c_2} = \frac{7}{10} m v^2$.

- *Seul le poids travaille. Donnons une méthode différente de celle vue précédemment pour calculer ce travail.* $\overline{W}_{\vec{P}} = P.x \cos \beta$; *comme* $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\overline{W}_{\vec{P}} = mgx \sin \alpha$.

- $E_{c_2} - E_{c_1} = \Sigma \overline{W} \Longrightarrow \frac{7}{10} m v^2 = mgx \sin \alpha$. *Dérivons cette relation par rapport au temps* $\frac{7}{10} m \times 2 v\gamma = mgv \sin \alpha$ *d'où* $\gamma = \frac{5}{7} g \sin \alpha$, γ *étant l'accélération du centre* G.

Remarque. *En appliquant le théorème du centre de gravité à la bille, on peut en déduire les composantes de* $\vec{R}$ $(\vec{P} + \vec{R} = m\vec{\gamma}$ *avec* $\gamma = 5/7\ g \sin \alpha)$.

CORRIGÉ

---

n° 70.

ÉNONCÉ

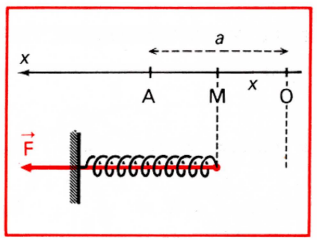
❶ Un ressort horizontal de raideur $k = 100$ N/m, de masse négligeable, initialement au repos est comprimé par une force horizontale $\vec{F}$ qui lui fait subir un raccourcissement $a = 4$ cm. Evaluer le travail effectué par $\vec{F}$.

CONSEIL

F étant une force de module variable, il faut évaluer le travail élémentaire dW, puis intégrer.

Repérons l'extrémité du ressort sur l'axe Ox; *lorsqu'il est au repos* x = 0, M *est en* O.
A chaque instant F = kx.
Le travail élémentaire effectué par $\vec{F}$ *pour passer de* x *à* x + dx *est* dW = Fdx = kxdx.
Lorsque M *passe de* O *à* A :

$$W = \int dW = \int_0^a kx\,dx = \left[k\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{1}{2} k a^2 = 0{,}08\ J$$

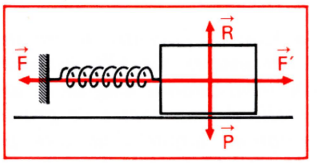


CORRIGÉ

ÉNONCÉ

❷ Un mobile de masse m est lancé sur un plan horizontal, sur lequel il glisse sans frottements, avec une vitesse v. Il est arrêté par le ressort, qu'il comprime, puis est renvoyé dans l'autre sens. Exprimer en fonction de v le raccourcissement maximal du ressort a.
Application numérique $m = 160$ g $\quad v = 1$ m/s.

Prenons comme système le solide évoluant de l'état 1 à l'état 2.



● Etat 1 : *le mobile arrive en contact avec le ressort, son énergie cinétique* $E_{c_1} = \frac{1}{2} m v^2$.

● Etat 2 : *le ressort est comprimé au maximum, ceci se produit lorsque le mobile rebrousse chemin*

$$v_2 = 0 \quad E_{c_2} = 0$$

CORRIGÉ

● *Dans cet intervalle de temps le mobile est soumis à trois forces : son poids* $\vec{P}$, *la réaction du plan* $\vec{R}$, *la poussée du ressort* $\vec{F'}$.

Evaluons les travaux $W_{\vec{P}} = 0$; $W_{\vec{R}} = 0$. *Pour calculer le travail de* $\vec{F'}$, *remarquons que le mobile exerce sur le ressort la force* $\vec{F} = -\vec{F'}$ *(d'après le principe de l'action et de la réaction). Comme* $\overline{W}_{\vec{F}} = \frac{1}{2} k a^2$, *(1re question),* $\overline{W}_{\vec{F'}} = -\overline{W}_{\vec{F}} = -\frac{1}{2} k a^2$

● $E_{c_2} - E_{c_1} = \Sigma \overline{W} \Longrightarrow 0 - \frac{1}{2} m v^2 = -\frac{1}{2} k a^2 \Longrightarrow a = v\sqrt{\frac{m}{k}} = 4.10^{-2}$ m = 4 cm.

Remarque. *Lors de la détente du ressort le mobile récupérera son énergie cinétique initiale.*

---

n° 70 *bis*. Le poids d'un solide S, au sol, est P_0. A l'altitude *h* il devient : $P = P_0 \frac{R_2}{(R+h)^2}$

ÉNONCÉ

(voir P 7.6) R : rayon terrestre.

Evaluer le travail effectué par cette force lorsque S est amené du sol à l'altitude *h*, en tenant compte de sa variation d'intensité.

CONSEIL

Utiliser la variable $z = R + h$

● *Soit* z *la distance de* S *au centre de la Terre.*

A chaque instant : $P = P_0 \frac{R^2}{z^2}$

● *Le travail élémentaire, résistant, pour passer de* z *à* z + dz *est :*

$$dw = P.dz = P_0 R^2 \frac{dz}{z^2}$$

CORRIGÉ

● *Lorsque* S *va du sol à l'altitude* h :

$$W = \int dW = \int_R^{R+h} P_0 R^2 \cdot \frac{1}{z^2} \cdot dz = \left[P.R^2 \left(-\frac{1}{z} \right) \right]_R^{R+h} = P_0 R^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)$$

finalement : $W = \frac{P_0 R h}{R+h}$

Remarques : si $h \ll R$ $\quad W \simeq P_0 h$ on retrouve la formule classique du travail du poids d'un corps.
W est la mesure arithmétique d'un travail résistant.

Contrôles

Pb 15 - Pb 16

Contrôle n° 1. On tord un fil de torsion de 30°. Calculer le travail nécessaire sachant qu'il faut exercer un couple de moment 0,5 m.N pour maintenir cette torsion de 30°.

Contrôle n° 2. Une voiture de masse 800 kg a une panne de batterie. Pour la faire démarrer trois personnes se proposent de la pousser. La voiture partant à vitesse nulle, pendant 7 m est poussée par les 3 personnes, ensuite pendant 5 m par deux personnes, finalement par une seule personne pendant 1 m. Le compteur de la voiture indique alors 10,8 km/h.

❶ Sachant que ce démarrage se passe sur le plat, qu'une personne seule arrive juste à vaincre les frottements supposés constants, calculer la force F de poussée donnée par chaque personne. (On admettra que chaque personne donne la même force F.)

❷ Le chauffeur ensuite embraye brutalement; lorsque le moteur se met en marche la vitesse n'est plus que 5,4 km/h. Cette deuxième phase s'est faite sur 5 m, en déduire le travail résistant nécessaire au démarrage du moteur.

❸ Dès la mise en marche du moteur, la voiture regagne de la vitesse et, en 200 m, repasse de 5,4 km/h à 108 km/h. Calculer la force de traction moyenne développée par le moteur.
Note : ne pas oublier que la force de frottement est constante et présente dans tout le mouvement.

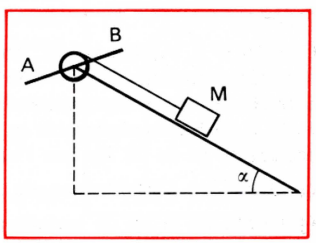
Contrôle n° 3.

❶ Une voiture développe une puissance de 85 ch. Son moteur tourne à 5 000 tr/mn, et elle roule alors à 153 km/h. Calculer le moment du couple disponible sur l'arbre du moteur et la force de traction développée par le moteur. On admet qu'il n'y a pas de perte de puissance dans les organes de transmission. 1 ch = 750 W.

❷ Sachant que la vitesse 153 km/h est atteinte sur le plat, quelle est la force de frottement supposée constante à cette vitesse?

❸ La voiture de masse 800 kg est lancée à 72 km/h, dans une descente de pente 10 %. Le chauffeur pendant 10 m appuie sur le frein, légèrement : la vitesse devient 63 km/h. Quel est le travail résistant donné par les freins. On admettra que la force de frottement est constante pendant ce freinage et égale au quart de celle trouvée à la première question. Le chauffeur a levé le pied de sur l'accélérateur : le moteur au ralenti donne une force de traction constante de 150 N. $g = 10\ m/s^2$.

Contrôle n° 4. On considère le système schématisé ci-contre. AB est une tige homogène de longueur $l = 0{,}5$ m, de masse $m = 120$ g, solidaire d'une poulie de rayon $r = 10$ cm, de masse négligeable. Dans la gorge de cette poulie s'enroule un fil inextensible, de masse négligeable, à une extrémité duquel est fixée une masse M = 50 g, pouvant glisser sans frottements sur un plan incliné par rapport à l'horizontale d'un angle $\alpha = 30°$. On donne $g = 10\ m/s^2$, le moment d'inertie de la tige est $J = \frac{1}{12} m\ l^2$.



❶ Le système est abandonné sans vitesse, la masse M parcourt la distance $d = 0{,}6$ m. Quelle est alors sa vitesse?

❷ Evaluer l'accélération de la masse M, ainsi que la tension du fil.

❸ En fait il s'exerce au niveau de la poulie un couple de frottements de moment constant $\mathcal{M}_f$. Calculer $\mathcal{M}_f$ sachant que l'accélération de M est 10 % plus faible que celle prévue à la deuxième question.

Contrôle n° 5. Soit un cylindre dont l'axe de révolution est horizontal, ce cylindre est immobile. On place une bille homogène sur la génératrice la plus élevée et on laisse aller cette bille sans vitesse initiale. La bille roule sans glisser, en restant dans un plan perpendiculaire à l'axe de révolution du cylindre. Montrer que la bille décolle du cylindre lorsqu'elle a parcouru un certain arc que l'on caractérisera par son angle au centre.

Contrôle n° 6. Une voiture a une masse de 1 tonne. Les résistances passives opposent à son déplacement une force parallèle à la vitesse et égale à 500 N. $g = 10\ m/s^2$.

❶ *a*) Quelle puissance la voiture développe-t-elle lorsqu'elle roule, sur le plat, à la vitesse constante de 90 km/h?

b) Cette vitesse est acquise au bout d'un parcours de 250 m : quelle est l'intensité de la force motrice supposée constante au cours du démarrage? Quelle est l'accélération?

❷ Quelle force de freinage le conducteur doit-il appliquer au véhicule s'il veut arrêter la voiture lancée à 90 km/h, après un parcours rectiligne horizontal de 100 m?

❸ *a*) La voiture monte maintenant une côte de pente 5 % à la vitesse constante de 72 km/h. Quelle est la puissance développée par le moteur?

b) Au cours de la montée, le conducteur coupe le moteur et la voiture continue sur sa lancée : quelle est la distance parcourue jusqu'à ce que la vitesse s'annule?

❹ La voiture à 72 km/h aborde un virage relevé d'un angle α par rapport à l'horizontale, de rayon R = 250 m. Déterminer α sachant que les roues ne subissent de la part de la route aucun effort latéral? (D'après Bac.)

Contrôle n° 7. Un volant est constitué par un cylindre de masse 1 tonne, homogène, de rayon 60 cm. Il est entraîné par un moteur qui développe une puissance constante $\mathcal{P} = 10\ kW$.

❶ Le volant étant à vitesse nulle, combien de temps faut-il au moteur pour le lancer à 600 tr/mn. On néglige les frottements. On prendra $\pi^2 = 10$.

❷ Ce volant est couplé avec un laminoir. Lorsque la vitesse 600 tr/mn est atteinte un lingot arrive dans le laminoir; 2,4 s après le lingot sort du laminoir, la vitesse n'est plus que 576 tr/mn.

a) Calculer le travail nécessaire pour écraser un lingot.

b) Calculer la puissance moyenne développée par l'ensemble moteur-volant, la comparer à la puissance du moteur.

c) Quel temps doit séparer le passage de deux lingots pour que la machine fonctionne cycliquement.

Contrôle n° 8. A) Un volant, dont on supposera toute la masse 7 kg concentrée sur une circonférence de diamètre D = 50 cm, a pour arbre un cylindre de diamètre $d = 25$ mm disposé horizontalement et reposant sur des roulements à billes. En un point A de l'arbre, on attache un fil F de masse négligeable qu'on enroule autour de lui, et l'on suspend à l'extrémité du fil une masse m de 28 kg que l'on abandonne sans vitesse initiale. $g = 9{,}8\ m/s^2$.

❶ Quelle est l'accélération du mouvement de m?

❷ Quelle est la loi de variation de la vitesse angulaire du volant :

a) en fonction du temps?

b) en fonction de la hauteur h de la masse m?

B) Le volant est maintenant suspendu par deux fils enroulés autour de son arbre auquel ils sont fixés. On abandonne le volant à lui-même à partir du repos.

❸ Quel est le rapport entre l'énergie de translation et l'énergie de rotation?

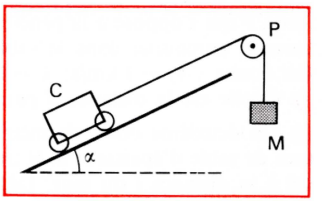
❹ Quelle est l'énergie cinétique de rotation du volant quand il est descendu de 5 m?

❺ Quelle est, à ce moment, sa vitesse angulaire, en radians par seconde et en tours par seconde?

❻ Quelle est, à ce moment, la vitesse d'un point de la circonférence de diamètre D?

❼ Quel est le nombre de tours effectués depuis le début de la chute?

Contrôle n° 9. Un chariot *c* est relié à une masse M par l'intermédiaire d'une poulie P. Le chariot se déplace sur un plan incliné de α par rapport à l'horizontale. La masse du chariot est $m' = 4$ kg. La masse de M est $m = 1$ kg. $\sin \alpha = 0{,}6 \qquad g = 10$ m/s².



Le système part sans vitesse initiale. Quelle est l'énergie cinétique totale du système et la vitesse acquise par M quand M a parcouru 50 cm depuis son point de départ?

On répondra à ces questions en considérant successivement les hypothèses suivantes :

a) On néglige le moment d'inertie de la poulie, on suppose que le chariot est en translation.

b) La poulie a une masse de 500 g supposée répartie sur sa circonférence, on suppose le chariot en translation.

c) La poulie a une masse de 500 g supposée répartie sur sa circonférence, le chariot de masse $m' = 4$ kg comprend en fait un bloc en translation de 3 kg et quatre roues cylindriques homogènes de masse totale 1 kg. Les roues roulent sans glisser sur le plan et ont même rayon.

Contrôle n° 10. Un volant en fonte de 2,02 m de diamètre extérieur est entraîné par un moteur qui, en régime normal, lui donne une vitesse constante de 300 tours par minute autour d'un axe horizontal situé à 1,50 m du sol. Toute la matière peut être considérée comme répartie sur une jante homogène de 10 cm de largeur comptée parallèlement à l'axe et de 2 cm d'épaisseur. (Masse volumique de la fonte : 7 700 kg/m³.)

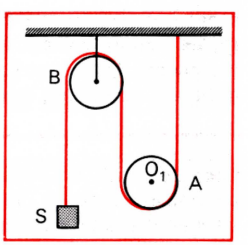
❶ Quelle est la vitesse angulaire du volant et son moment d'inertie par rapport à l'axe? (Bien spécifier les unités employées.) Quelle est la variation relative de vitesse quand on demande un excès de travail de 1 000 joules?

❷ A la suite d'une rupture, un fragment de fonte de 100 g se détache, alors qu'il se trouve à l'extrémité supérieure du diamètre vertical. A quelles forces est-il soumis à l'instant qui précède l'arrachage? Quelles sont sa vitesse à ce moment et son énergie cinétique?

❸ En quel point du sol ira-t-il tomber s'il ne rencontre pas d'obstacle? Quelle sera sa vitesse à l'arrivée et son énergie cinétique à ce moment (la résistance de l'air est négligeable)?

❹ Aussitôt après l'accident le volant est freiné par un couple constant et s'arrête après avoir tourné 50 tours. On demande le travail effectué par le frein ainsi que le couple de freinage. (Bac.)

Contrôle n° 11. On considère le dispositif ci-contre : A et B sont deux cylindres identiques de densité $d = 2{,}7$, de rayon R = 10 cm, d'épaisseur 1 cm; S est un solide de masse *m*. Le cylindre B tourne autour de son axe fixe, A est mobile. Soit O_1 le centre de A.



❶ Quelle est la masse M de A et B? Quel est le moment d'inertie J de A et B par rapport à leur axe de révolution?

❷ Quelle est la masse m_1 de S qui réalise l'équilibre?

❸ S a maintenant une masse m_2 égale à M (masse de A ou B). On abandonne S sans vitesse.

a) La corde ne glissant pas sur les cylindres A et B, quelles relations y a-t-il entre les vitesses v_1 de O_1 et *v* de S; entre la vitesse de rotation ω de B et *v*; montrer que la vitesse angulaire ω_1 de A est égale à $\frac{\omega}{2}$.

b) Quelle est l'énergie cinétique du système en fonction de M et v vitesse de S ?

c) Calculer l'accélération de S.

d) Calculer les tensions des trois brins de fil.

On admettra que la somme des travaux des forces intérieures est nulle. $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

Contrôle n° 12. Un obus arrive sur un obstacle en sable avec une vitesse $\vec{v_1}$, horizontale. La force $\vec{F}$ qui s'oppose à la pénétration a une intensité que l'on supposera proportionnelle à la distance x parcourue dans le sable : $F = kx$.

On donne : $v_1 = 1\ \text{km/s}$; $k = 2{,}5.10^5\ \text{N/m}$; masse de l'obus : $m = 10\ \text{kg}$.

❶ Quelle est la distance d parcourue par l'obus jusqu'à l'arrêt ?

❷ Un deuxième obus, de même masse, arrive avec la vitesse $\overrightarrow{v_2}$, horizontale, sur un mur de sacs de sable d'épaisseur d. Il traverse le mur à la hauteur h au-dessus du sol et retombe sur le sol à la distance l du mur. Déterminer la différence : $(v_2 - v_1)$.

On donne : $h = 2\ \text{m}$; $l = 1\ \text{m}$; $g = 10\ \text{m/s}^2$.

Contrôle n° 13. Un marteau-pilon est constitué par une masse de 400 kg, coulissant sans frottements le long d'une glissière verticale. $g = 10\ \text{m/s}^2$.

❶ Le marteau est soulevé d'une hauteur de 3 m en 3 secondes, quelle est la puissance moyenne du moteur qui l'entraîne ?

❷ Le marteau retombe en chute libre sur une pièce à forger, dont l'épaisseur, sous l'effet du choc diminue de 6 cm. Quelle est la vitesse du marteau en fin de course, juste avant le choc ? Quelle est la force moyenne opposée par la pièce au marteau ?

❸ En fait, au cours de sa descente, le marteau est poussé par un piston de section 0,1 m², de masse négligeable, dont l'abscisse, x, passe de 1 m à 4 m. La pression effective des gaz dans le cylindre contenant le piston est donnée par : $p_e = \dfrac{f}{x^2}$ avec $f = 1{,}6.10^5\ \text{N}$.

Déterminer dans ces conditions la vitesse du marteau en fin de course. De combien de centimètres réduit-il l'épaisseur de la pièce étudiée au 2° ?

Contrôle n° 14. Une voiture-jouet, de masse totale 60 g, est munie d'un volant cylindrique homogène en plomb de masse 40 g, de rayon 1 cm. Lorsque les roues effectuent un tour, le volant en fait dix, leur rayon vaut également 1 cm, leur masse négligeable.

❶ La voiture est poussée, à vitesse constante, sur 50 cm en 2,5 s. Quelle est l'énergie cinétique de rotation acquise par le volant ?

❷ La voiture, immobile, est mise en bas d'une pente faisant un angle de 11°30′ avec l'horizontale, après avoir lancé le volant comme au 1°. Quelle distance va-t-elle gravir sur cette pente jusqu'à ce que sa vitesse s'annulle ($g = 10\ \text{m/s}^2$, il n'y a aucun travail dû aux frottements) ?

❸ La voiture partant à vitesse nulle, son volant étant aussi à vitesse nulle, descend la pente précédente. Quelle est l'accélération linéaire des parties de la voiture en translation ? On admet qu'il y a roulement sans glissement.

Contrôle n° 15. Un volant de moment d'inertie J est lancé par un moteur développant un couple de moment constant $\mathcal{M} = 50\ \text{m.N}$. Le volant en 100 tours, partant à vitesse nulle arrive à la vitesse 10 tr/s au bout du temps t. On néglige les frottements.

❶ Calculer l'énergie cinétique du volant.

❷ En déduire le moment d'inertie du volant.

❸ Quelle est l'accélération angulaire du volant au cours de ce démarrage ?

❹ En déduire le temps t nécessaire pour atteindre la vitesse 10 tr/s.

Quantité de mouvement

Pb 17

Conseils généraux

Le théorème de la variation de la quantité de mouvement s'applique comme le théorème du centre de gravité :

1° choix d'un système

2° inventaire des forces extérieures

3° $\Sigma\vec{F}\cdot\Delta t = \Delta\vec{\rho}$

4° projeter sur un axe convenablement choisi.

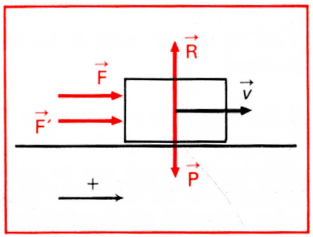
Dans de nombreux problèmes $\Sigma\vec{F}\cdot\Delta t = \vec{0}$ (problèmes sur les chocs en particulier), il suffit alors d'écrire que la quantité de mouvement se conserve : $\vec{\rho_1} = \vec{\rho_2}$.

ÉNONCÉ

n° 71. Deux hommes poussent une automobile, initialement immobile, de masse 1 tonne, sur une route horizontale. Chacun exerce une force F = 200 N, le premier pendant un temps $t = 5$ s, le second pendant $2t = 10$ s. Quelle est la vitesse acquise ? On néglige les frottements divers.

CORRIGÉ

- *L'automobile est soumise à son poids* $\vec{P}$, *à la réaction du sol* $\vec{R}$, *aux deux forces* $\vec{F}$ *et* $\vec{F'}$ *de même intensité* F.
- *La quantité de mouvement initiale est nulle* ($\vec{v} = \vec{0}$), *la quantité de mouvement finale est* $m\vec{v}$ ($\vec{v}$ *vitesse finale*).
- *Cette variation de quantité de mouvement est donnée par :*



$$\vec{P}\cdot 2t + \vec{R}\cdot 2t + \vec{F}\cdot t + \vec{F'}\cdot 2t = m\vec{v} - \vec{0}.$$

(on aurait pu dire pour simplifier que $\vec{P}$ *et* $\vec{R}$, *s'annulant n'interviennent pas).*

- *Projetons cette égalité vectorielle sur l'horizontale :*

$$3F\cdot t = mv \qquad d'où \qquad v = \frac{3Ft}{m} = 3m/s$$

REMARQUES

Remarques

Le théorème de l'énergie cinétique fait intervenir les travaux qu'ils se fassent simultanément ou successivement (voir Contrôles Pb 15, Pb 16, n° 2).

Le théorème de la variation de la quantité de mouvement fait intervenir les impulsions, qu'elles se fassent simultanément ou successivement.

Le théorème du centre de gravité fait intervenir les forces qui agissent simultanément. Ainsi, avec ce théorème pour résoudre cet exercice n° 71, il faudrait découper l'expérience en deux phases (les 5 premières secondes où agissent $\vec{F}$ et $\vec{F'}$; les 5 dernières secondes où agit $\vec{F'}$), pour résoudre le contrôle n° 2, il aurait fallu découper en trois phases.

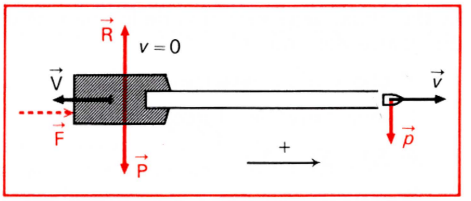
ÉNONCÉ

n° 72. Un fusil, de masse M = 4 kg, tire horizontalement, une balle, de masse m = 20 g, qui sort du canon avec une vitesse égale à 500 m/s.

❶ Quelle est la vitesse de recul du fusil ?

CONSEIL

Considérer le système (fusil, balle), dans ce système, les forces pressantes dues à la combustion de la poudre sont des forces intérieures. On admet que le tireur donne juste la force $\vec{R}$ nécessaire au soutien de l'arme.



- *Le fusil et la balle sont soumis à leurs poids et à la force $\vec{R}$ exercée par le tireur qui soutient l'arme.*
- *La quantité de mouvement initiale de ce système est nulle (la balle est immobile au fond du canon, le fusil est immobile).*

La quantité de mouvement finale est $M\vec{V} + m\vec{v}$ ($\vec{V}$ *vitesse du fusil,* $\vec{v}$ *de la balle*).

CORRIGÉ

- *Cette variation de quantité de mouvement est donnée par :*

$$(\vec{P} + \vec{p} + \vec{R})\Delta t = (M\vec{V} + m\vec{v}) - \vec{0} \quad (1) \quad \Delta t \text{ étant la durée du coup.}$$

- *Projetons sur l'horizontale. Supposons qu'on ignore le sens de* $\vec{V}$, *mesurons alors* $\vec{V}$ *algébriquement sur un axe horizontal orienté dans le sens de* $\vec{v}$

$$0 = M\overline{V} + mv \implies \overline{V} = -\frac{mv}{M} = -2{,}5 \text{ m/s}$$

$\overline{V}$ *est* < 0, *par suite le vecteur* $\vec{V}$ *a le sens indiqué sur la figure : c'est bien une vitesse de recul.*

ÉNONCÉ

❷ La durée du mouvement de la balle dans le canon est égale à $3 \cdot 10^{-3}$ s. Quelle force F, supposée constante devrait exercer le tireur pour maintenir le fusil fixe.

CORRIGÉ

- *Le fusil est soumis à une force supplémentaire* $\vec{F}$ (*en pointillé sur la figure*).
- *La quantité de mouvement finale est* $m\vec{v}$ ($\vec{V} = \vec{0}$).
- *La variation de la quantité de mouvement est donnée par :*

$$\vec{F} \cdot \Delta t + (\vec{P} + \vec{p} + \vec{R})\Delta t = m\vec{v} - \vec{0}$$

- *Projetons sur l'horizontale* $F \cdot \Delta t = mv$ *d'où* $F = \dfrac{mv}{\Delta t} \simeq 3\,300$ N.

Cette force est importante, en fait ; les fusils sont munis de dispositif atténuant le recul; d'autre part le tireur donne une impulsion qui se prolonge plus longtemps que la durée du mouvement de la balle dans le canon.

---

n° 73.

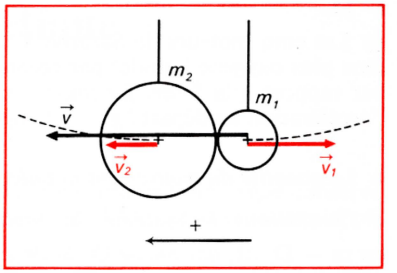
ÉNONCÉ

❶ Deux billes d'acier de masses m_1 = 20 g et m_2 = 80 g, sont suspendues par deux fils. A l'équilibre, les fils sont verticaux, les billes en contact. La masse m_1 est écartée de sa position d'équilibre. Elle arrive sur m_2 avec la vitesse v = 1 m/s. Le choc est parfaitement élastique. Evaluer les vitesses v_1 et v_2 de chaque bille après le choc.

CONSEIL

Bien définir l'état initial et l'état final du système, le choc étant parfaitement élastique la quantité de mouvement et l'énergie cinétique se conservent.

● *Considérons le système constitué par les deux billes, juste avant le choc* m_1 *à la vitesse* $\vec{v}$, m_2 *une vitesse nulle. Juste après le choc,* m_1 *à la vitesse* $\vec{v_1}$, m_2 *la vitesse* $\vec{v_2}$.



● *Pendant le choc très bref, le système ne subit pas d'impulsion extérieure* ($\Delta t \simeq 0$), *sa quantité de mouvement se conserve.*

$$m_1\vec{v} + \vec{0} = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}.$$

Mesurons les vitesses algébriquement sur un axe de même direction et même sens que $\vec{v}$

$$m_1\bar{v} = m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 \Longrightarrow m_1(\bar{v} - \bar{v}_1) = m_2\bar{v}_2 \quad (1)$$

CORRIGÉ

● *Le choc étant parfaitement élastique, l'énergie cinétique se conserve*

$$\frac{1}{2}m_1\bar{v}^2 = \frac{1}{2}m_1\bar{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\bar{v}_2^{\,2} \Longrightarrow m_1(\bar{v}^2 - \bar{v}_1^{\,2}) = m_2\bar{v}_2^{\,2}. \quad (2)$$

Divisons (2) *par* (1) *membre à membre*

$$\bar{v} + \bar{v}_1 = \bar{v}_2 \quad (3)$$

Il suffit de résoudre le système du 1er *degré* (1) *et* (3), *les inconnues étant* $\bar{v}_1$ *et* $\bar{v}_2$.

$$\bar{v}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\bar{v} = -0{,}6 \text{ m/s}.$$

$$\bar{v}_2 = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}\bar{v} = 0{,}4 \text{ m/s}.$$

m_1 *rebondit,* m_2 *est projetée en avant.*

REMARQUE

■ **Remarque**

Si on ne voit pas l'astuce de calcul aboutissant à (3), on peut résoudre le système d'équations (1) (2) par substitution : on tire $\bar{v}_1$ de (1) par exemple, ce qui donne numériquement $\bar{v}_1 = 1 - 4\,\bar{v}_2$, et on reporte dans (2), on obtient une équation du 2e degré en $\bar{v}_2$: $5\bar{v}_2^2 - 2\bar{v}_2 = 0$. Cette équation admet deux racines $\bar{v}_2 = 0$ $\bar{v}_2 = 0{,}4$ m/s. De façon générale l'équation du 2e degré donne la vitesse avant le choc (ici $\bar{v}_2 = 0$) à rejeter, et la vitesse après le choc demandée.

ÉNONCÉ

❷ Les billes d'acier sont remplacées par des masses en plomb. A la suite du choc, elles restent soudées l'une à l'autre, c'est un choc parfaitement mou. Les autres conditions sont les mêmes qu'au ❶. Déterminer la vitesse des masses après le choc.

CORRIGÉ

Après le choc, les deux masses soudées ont la même vitesse $\vec{v'}$. *Pendant le choc, très bref, le système ne subit pas d'impulsion extérieure, sa quantité de mouvement se conserve :*

$$m_1\vec{v} = m_1\vec{v'} + m_2\vec{v'} \Longrightarrow m_1\bar{v} = (m_1 + m_2)\,\bar{v'}$$

d'où

$$\bar{v'} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\bar{v} \Longrightarrow \bar{v'} = 0{,}2 \text{ m/s}.$$

ÉNONCÉ

❸ Quelle est dans le dernier cas, la variation de l'énergie cinétique du système. Expliquer.

CORRIGÉ

$$\Delta(E_c) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v'^2 - \frac{1}{2}m_1v^2 = -\frac{m_1m_2}{2\,(m_1 + m_2)}v^2 = -8.10^{-3} \text{ J}.$$

Les deux masses, s'écrasent l'une contre l'autre, les forces intérieures qui s'opposent à ces déformations, effectuent un travail résistant de 8.10^{-3} J.

n° 74.

ÉNONCÉ

❶ Les cinq moteurs de Saturne V consomment D = 15 tonnes de combustible (kérosène plus oxygène liquide) par seconde, les gaz sont éjectés à une vitesse $u = 2\,300$ m/s par rapport à la fusée. La masse de la fusée au départ est $m = 3{,}2.10^6$ kg. Quelle est l'accélération au départ ? $g = 9{,}8$ m/s².

CORRIGÉ

● *La quantité du mouvement initiale de la fusée est nulle.*

● *Considérons le système* Δt *secondes après, la fusée à la vitesse* $\vec{\Delta v}$, *sa masse est* $m - D.\Delta t$; *une masse* $D.\Delta t$ *de gaz est à la vitesse* $\vec{u} + \vec{\Delta v}$. *La quantité de mouvement du système est donc* $(m - D.\Delta t)\,\vec{\Delta v} + D.\Delta t(\vec{u} + \vec{\Delta v}) = m\,\vec{\Delta v} + D.\Delta t.\vec{u}$.

● *Les forces pressantes dues aux gaz sont des forces intérieures au système, le système reçoit seulement l'impulsion* $\vec{P}\,\Delta t$ ($\vec{P}$ *poids total du système*).

● *Par suite* $\vec{P}.\Delta t = m\vec{\Delta v} + D.\Delta t.\vec{u}$, *divisions par* Δt, *comme* $\dfrac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \vec{\gamma}$.

$$\vec{P} = m\vec{\gamma} + D\vec{u}.$$ *Projetons sur un axe vertical orienté vers le haut*

$$-P = m\gamma - Du \Longrightarrow m\gamma = Du - P \Longrightarrow \gamma = \frac{Du}{m} - g \simeq 1 \text{ m/s}^2.$$

ÉNONCÉ

❷ Evaluer la poussée $\vec{F}$ des moteurs, au moment du départ.

CORRIGÉ

Il s'agit de la résultante des forces pressantes exercées par les gaz sur le reste de la fusée, dont la masse est pratiquement m. *D'après le théorème du centre de gravité :* $\vec{F} + \vec{P} = m\vec{\gamma}$ *puisque* $\vec{P} = m\vec{\gamma} + D\vec{u}$ (❶) $\vec{F} = -D\vec{u}$.

La poussée est bien dirigée vers le haut.

$$F = 15.10^3.2\,300 = 3{,}45.10^7 \text{ N}.$$

ÉNONCÉ

❸ En admettant que cette poussée reste constante, donner une expression de l'accélération γ, à l'instant t. A $t = 0$ la fusée démarre.
Quelle est la valeur de γ lorsque tout le combustible, 2 100 tonnes, est consommé ? (On ne tiendra pas compte des libérations d'étages, et de la variation de g.)

CONSEIL

Noter que la masse varie.

CORRIGÉ

Soit m′ *la masse de la fusée à l'instant* t, $m' = m - Dt$.
D'après le théorème du centre de gravité : $\vec{F} + \vec{P} = m'\vec{\gamma}$
Projetons sur la verticale orientée vers le haut :

$$F - P = m'\gamma \qquad d'où : \qquad \gamma = \frac{F - P}{m'} = \frac{F}{m - Dt} - g$$

Numériquement : $\gamma = 21{,}6$ m/s²

Moment cinétique

Pb 18

■ **Conseil général**

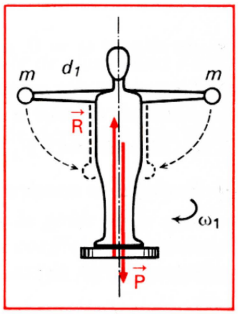
Pour affirmer que le moment cinétique d'un système mobile autour d'un axe se conserve, il faut au préalable démontrer que la somme des moments des forces extérieures appliquées au système est nulle.

---

n° 75. Un expérimentateur, monté sur un plateau horizontal, mobile sans frottements autour d'un axe vertical, est mis en rotation à la vitesse $N_1 = 0{,}2$ tr/s, alors qu'il porte à bout de bras deux masses ponctuelles m, $m = 2$ kg, situées à 80 cm de l'axe. Il rabat les bras le long du corps, les masses sont à 20 cm de l'axe. Le moment d'inertie de l'expérimentateur et du plateau sans les masses est $J = 2\text{kg.m}^2$.

ÉNONCÉ

❶ Déterminer la nouvelle vitesse de rotation N_2.



• *Le système tournant est soumis à son poids* $\vec{P}$ *vertical, et à la réaction* $\vec{R}$ *de l'axe. Ces deux forces sont parallèles à l'axe (et sont même portées par l'axe) : la somme des moments des forces appliquées au système, en négligeant les forces de frottements, est nulle.*

• *Donc, le moment cinétique se conserve.*
Soit J_1 *le moment d'inertie initial, lorsque la vitesse est* N_1 tr/s *ou* ω_1 rd/s.
Soit J_2 *le moment d'inertie final, lorsque la vitesse est* N_2 tr/s *ou* ω_2 rd/s

CORRIGÉ

$$\sigma = J_1\omega_1 = J_2\omega_2 \Longrightarrow J_1N_1 = J_2N_2 \Longrightarrow N_2 = N_1\frac{J_1}{J_2}.$$

$J_1 = J_0 + 2\,md_1^2 = 4{,}56\ \text{kg.m}^2$ $\quad J_2 = J_0 + 2\,md_2^2 = 2{,}16\ \text{kg.m}^2$.
Par suite $N_2 = 0{,}42$ tr/s.

❷ Quelle est la variation d'énergie cinétique du système?

ÉNONCÉ

$$\Delta(E_c) = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}J_1\omega_1^2. \qquad \textit{Comme } \sigma = J_1\omega_1 = J_2\omega_2.$$

$$\Delta(E_c) = \frac{\sigma}{2}(\omega_2 - \omega_1) \simeq 4\ \text{J}.$$

CORRIGÉ

Remarque : *L'énergie cinétique d'un tel système est fonction linéaire de* ω *puisque* $\sigma = J\omega$ *reste constant :* $E_c = \frac{\sigma}{2}\omega$.

---

n° 76. Nous n'avons pas, dans notre cours P 18, énoncé le théorème suivant : la somme des moments des impulsions reçues par un système, pendant un intervalle de temps, est égale à la variation du moment cinétique :

$$\Sigma\,(\overline{\mathcal{M}}\,.\,\Delta t) = \Delta\,\bar{\sigma} = \Delta(J\overline{\omega}).$$

ÉNONCÉ

❶ Démontrer ce théorème dans le cas d'un solide en rotation, soumis à des moments de force constants pendant Δt.

CORRIGÉ

Ecrivons la relation fondamentale de la dynamique de rotation : $\Sigma \overline{\mathcal{M}} = J\overline{\mathcal{A}}$ $\Sigma \overline{\mathcal{M}}$ *est constant,* $\overline{\mathcal{A}}$ *également le mouvement est donc uniformément varié. Si* $\Delta\overline{\omega}$ *est la variation de vitesse pendant* Δt *secondes :* $\overline{\mathcal{A}} = \dfrac{\Delta\overline{\omega}}{\Delta t}$ *d'où :* $\Delta t\, \Sigma \overline{\mathcal{M}} = J\, \Delta\overline{\omega}$.

Les moments $\overline{\mathcal{M}}$ *sont constants,* J *également, donc :* $\Sigma\, (\overline{\mathcal{M}}.\Delta t) = \Delta(J\overline{\omega})$.

ÉNONCÉ

❷ Le théorème de la variation du moment cinétique peut être intéressant pour étudier un système déformable en rotation, ou un système soumis à des impulsions successives (cas exceptionnels en Terminales C.E.).

Exemple : une roue de loterie est un disque de rayon r, elle est munie à sa périphérie de 24 pointes. Un balai B (qui détermine le numéro gagnant) donne une impulsion $(\vec{f}.\Delta t)$ résistante, tangentielle, à chaque fois qu'une pointe passe à son niveau. Le forain lance la roue en donnant successivement deux forces tangentielles $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$, appliquées à r, de l'axe pendant des durées Δt_1 et Δt_2. $F_1 = 30$ N $\Delta t_1 = 0{,}5$ s $F_2 = 20$ N $\Delta t_2 = 0{,}4$ s. La roue, partant le balai dans la case 23, fait 4 tours complets et s'arrête dans la case 19. Calculer l'impulsion résistante $(f.\Delta t)$ due à chaque choc pointe-balai ?

CORRIGÉ

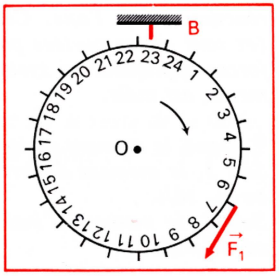
- *Au départ* $\omega = 0$. *à la fin* $\omega = 0$, *donc* $\Delta\overline{\sigma} = 0$.
- *La somme des moments des impulsions est donc nulle. Le poids de la roue a un moment nul.*

$$\Sigma \overline{\mathcal{M}}.\Delta t = 0 \Longrightarrow F_1.r.\Delta t_1 + F_2.r.\Delta t_2 - n(f.\Delta t)\, r = 0.$$

- *Evaluons le nombre de chocs pointe-balai :*

$$n = 4 \times 24 + 4 = 100.$$

- *Par suite* $(f.\Delta t) = \dfrac{r\,(F_1\Delta t_1 + F_2\Delta t_2)}{100\, r} = 0{,}23$ N.s.



ÉNONCÉ

Exemple. Un moteur développe un couple de moment constant $\mathcal{M} = 11$ m.N. Il met en rotation un système, qui se déforme, par l'effet des forces centrifuges, lorsque ω, la vitesse angulaire, augmente. Le moment d'inertie J est donné par $J = 5 + 0{,}2\,\omega$ (S.I.) Au bout de combien de temps, le système, initialement immobile atteint-il la vitesse $\omega = 30$ rd/s ?

CORRIGÉ

- *La somme des moments des impulsions se réduit à :* $\mathcal{M}.\Delta t$, Δt *est la durée demandée.*
- *Le moment cinétique initial est nul.*
- *Le moment cinétique final est* $J\omega$.
- $$\mathcal{M}.\Delta t = J\omega - O \Longrightarrow \Delta t = \frac{(5 + 0{,}2.30).30}{11} = 30\,\text{s}.$$

Résistance de l'air
Systèmes d'unités

Pb 19
Pb 20

n° 77. (d'après Bac).

ÉNONCÉ

❶ Une sphère creuse est lâchée dans l'air, sans vitesse initiale, on étudie son mouvement, au bout d'un certain temps de chute par chronophotographie. L'appareil photographique est à 15 m de la verticale de chute, sa distance focale est 10 cm, l'objectif est démasqué au moyen d'un disque portant 8 trous, effectuant 3 tours par seconde. Les images de la sphère sont équidistantes de 3 mm. Que peut-on en déduire pour le mouvement de la sphère ?

CORRIGÉ

Les prises de vue sont espacées de $\Delta t = \frac{1}{24}$ s. *Pendant cet intervalle de temps, la sphère parcourt la distance* $\Delta x = 3.10^{-3} \times \frac{15}{0{,}1} = 0{,}45$ m. *Le mouvement est donc uniforme de vitesse* $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0{,}45 \times 24 = 10{,}8$ m/s : *c'est la vitesse limite de chute dans l'air.*

ÉNONCÉ

❷ Quelle serait la vitesse limite d'une sphère de même diamètre, de densité 9 fois plus grande ?

CORRIGÉ

La vitesse limite est atteinte lorsque la résistance de l'air équilibre le poids de la sphère $R = P$. *Dans le domaine de vitesse considéré* $R = KSv^2$, K *étant un coefficient dépendant de la forme du corps et de la masse volumique de l'air, par suite* K *est le même pour les deux sphères.*

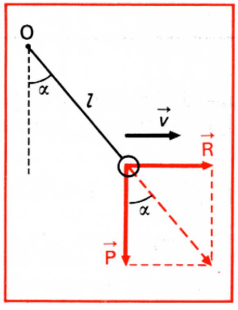
Pour la 1re sphère $P_1 = KS_1v_1^2$ *avec* $v_1 = 10{,}8$ m/s.

Pour la 2e sphère $P_2 = KS_2v_2^2$, *sachant que les sphères sont de même diamètre* $S_1 = S_2$ *d'où en divisant membre à membre* $\frac{P_2}{P_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2}$ $\quad \frac{P_2}{P_1} = 9 \Longrightarrow v_2 = 3v_1 = 32{,}4$ m/s.

La vitesse limite est proportionnelle à la racine carrée de la densité.

ÉNONCÉ

❸ La sphère utilisée au ❶ est maintenant fixée à l'extrémité d'une tige de poids négligeable mobile autour de son extrémité. Lorsque ce dispositif est placé dans un vent horizontal de vitesse v, la tige s'incline d'un angle α sur la verticale. Calculer v pour $\alpha = 45°$ et $\alpha = 60°$.



CORRIGÉ

- *A l'équilibre* $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{P}} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{R}} = 0$, $\vec{P}$ *et* $\vec{R}$ *étant des forces concourantes* $\Longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{P}+\vec{R}} = 0$, *par suite la résultante de* $\vec{P}$ *et* $\vec{R}$ *doit passer par l'axe. Comme* $\vec{R} \perp \vec{P}$, *on voit sur la figure que* $\text{tg}\,\alpha = \frac{R}{P}$, *d'où* $KSv^2 = P\,\text{tg}\,\alpha$ (1).
- *Au cours de l'expérience du* ❶ $KSv_1^2 = P$ (2).
- *Divisons membre à membre* $\frac{(1)}{(2)} \Longrightarrow \frac{v^2}{v_1^2} = \text{tg}\,\alpha \Longrightarrow v = v_1\sqrt{\text{tg}\,\alpha}$.

Pour $\alpha = 45°$ $\quad v = 10{,}8$ m/s; $\quad$ pour $\alpha = 60°$ $\quad v = 14{,}2$ m/s.

ÉNONCÉ

❹ La sphère utilisée au ❶ pèse 4,5 g, son diamètre est 42 mm, la masse volumique de l'air est $a = 1{,}3$ g/litre. Calculer d'une part K, en précisant son unité; d'autre part le coefficient dû à la forme sphérique C et son unité. On rappelle que $K = Ca$; $g = 9{,}80$uS.I.

CORRIGÉ

• $K = \dfrac{P}{Sv_1^2} = \dfrac{mg}{Sv_1^2} = \dfrac{4{,}5 \,.\, 10^{-3}\text{kg} \times 9{,}8 \text{ m} \,.\, \text{s}^{-2}}{3{,}14 \,.\, (21)^2 \,.\, 10^{-6}\text{m}^2 \times (10{,}8)^2\text{m}^2\,.\,\text{s}^{-2}} = 0{,}27 \text{ kg/m}^3.$

• $C = \dfrac{K}{a}$ *en remarquant que* 1 g/litre = 1 kg/m³ $\Longrightarrow C = \dfrac{0{,}27 \text{ kg/m}^3}{1{,}3 \text{ kg/m}^3} = 0{,}2$: *c'est un nombre abstrait.*

---

n° 78.

ÉNONCÉ

❶ Un brouillard est constitué de gouttelettes d'eau de diamètre 2 microns. Quelle est leur vitesse limite de chute dans l'air? Pour une sphère de faible vitesse $R = 6\pi\eta rv$ (1), le coefficient de viscosité η de l'air est $\eta = 1{,}7.10^{-5}$u S.I. Le poids volumique de l'eau est $\varpi = 10^4$ N/m³.

CORRIGÉ

La vitesse limite est atteinte lorsque la résistance de l'air équilibre le poids d'une goutte : $R = P$, *comme* $P = V\varpi = 4/3\ \pi r^3\varpi$, *on en déduit :*

$$6\pi\ \eta\ rv = 4/3\ \pi r^3\ \varpi \Longrightarrow v = 2/9\ \frac{r^2\varpi}{\eta} = 1{,}3.10^{-4} \text{ m/s}.$$

Constatons que la vitesse est très petite devant 1 m/s *ce qui justifie l'utilisation de la formule* (1).

ÉNONCÉ

❷ Si la goutte tombait en chute libre, sous la seule action de son poids, au bout de quel intervalle de temps t, atteindrait-elle cette vitesse? $g = 10$ m/s².

CORRIGÉ

Dans ce cas la goutte serait animée d'un mouvement uniformément accéléré d'accélération g *telle que* $v = gt \Longrightarrow t = \dfrac{v}{g} = 1{,}3.10^{-5}$ s.

(En fait il faut 6.10^{-5} s *pour atteindre cette vitesse à* 1 % *près par défaut.)*

ÉNONCÉ

n° 79. Quelle est en pascals la pression donnant une dénivellation de 70 cm de mercure. La densité du mercure est 13,6. $g = 9{,}8$ m/s².

CORRIGÉ

$p = h\varpi$ $\quad h = 0{,}7$ m. *La densité* $d = \dfrac{\varpi}{\varpi_0}$ ϖ_0 *étant le poids volumique de l'eau :*

$\varpi_0 = 10^3 \times 9{,}8$ N/m³, *par suite* $p = 0{,}7 \times 13.6 \times 10^3 \times 9{,}8 \simeq 93.300$ Pa.

Pendule pesant (composé ou simple)

Pb 21
Pb 22

Conseils généraux

Ne pas oublier que le mouvement de rotation ne peut être considéré comme sinusoïdal que si l'amplitude α est faible. Certaines méthodes de résolution dépendront donc de l'ordre de grandeur de α.
Il importe aussi de bien distinguer le pendule simple (constitué d'un seul point matériel) et le pendule composé (constitué de plus d'un point matériel).

La formule donnant la période $\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{Mga}}\right)$ n'est valable que pour les petites oscillations, mais aussi lorsque le pendule n'est soumis qu'à son poids. Si d'autres forces interviennent (force magnétique, poussée d'Archimède, moment de torsion...) il faudra refaire la théorie. On montrera alors que $\Sigma\mathcal{M}$ est de la forme $-C\theta$.

---

n° 80. Une tige homogène verticale, de masse m, de longueur l, peut osciller autour de son extrémité supérieure O.

ÉNONCÉ

❶ Déterminer la période de ses petites oscillations. Le moment d'inertie par rapport à un axe horizontal passant par le centre de gravité est $\frac{ml^2}{12}$.

Application numérique : $m = 300$ g $\quad l = 1$ m $\quad g = 10$ m/s².

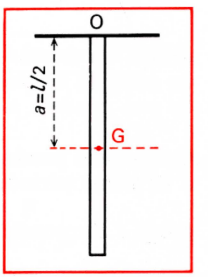
CONSEIL

Ne pas oublier qu'il faut calculer le moment d'inertie par rapport à un axe passant par O.

CORRIGÉ

● *Soit* J *le moment d'inertie par rapport à un axe horizontal passant par* O. *D'après le théorème de Huyghens* $J = J_G + mOG^2$. *D'après l'énoncé*

$$J_G = \frac{ml^2}{12} \text{ d'où } J = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2.$$



● *Le centre de gravité, la tige étant homogène, est au milieu de la tige :* $a = \frac{l}{2}$.

● *Les oscillations étant de faible amplitude leur période est :*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\,ml^2}{3\,mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}} = 1{,}62 \text{ s.}$$

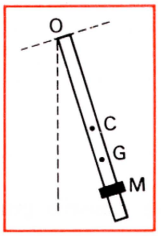
ÉNONCÉ

❷ Sur cette tige peut coulisser une masse ponctuelle M. M étant fixée dans une position repérée par $OM = x$, exprimer la période des petites oscillations en fonction de x. Représenter graphiquement T^2 en fonction de x. $M = 100$ g, $\pi^2 = 10$.

CONSEIL

Pour déterminer le centre de gravité G d'un système on peut découper le système en parties de masse m_1, m_2... de centre de gravité A_1, A_2... G est le barycentre de A_1, A_2... affectés des coefficients m_1, m_2... d'où $(m_1 + m_2 + ...)\,\overrightarrow{OG} = m_1\,\overrightarrow{OA_1} + m_2\,\overrightarrow{OA_2} + ...$

CORRIGÉ



● *Le moment d'inertie du pendule est maintenant égal au moment d'inertie de la tige* $\frac{ml^2}{3}$ *augmenté du moment d'inertie de* M, Mx^2, *d'où* $J = \frac{ml^2}{3} + Mx^2$.

● *Soit* C *le milieu de la tige,* G *le centre de gravité du pendule, d'après la formule des barycentres*

$$(m + M)\,\overrightarrow{OG} = m\overrightarrow{OC} + M\overrightarrow{OM} \Longrightarrow (m + M)a = \frac{ml}{2} + Mx.$$

● *La période est donnée par*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{(M + m)\,ga}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ml^2}{3} + Mx^2}{\left(\frac{ml}{2} + Mx\right)g}} = 2\sqrt{\frac{1 + x^2}{1{,}5 + x}}$$

D'où $T^2 = \frac{4\,(1 + x^2)}{1{,}5 + x}$

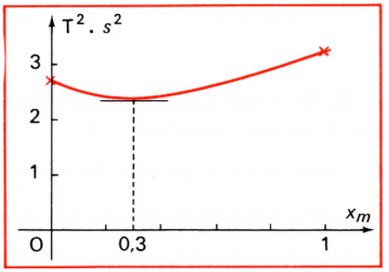
Calculons la dérivée

$$\frac{d\,(T^2)}{dx} = \frac{4[x^2 + 3x - 1]}{(1{,}5 + x)^2}$$

Elle s'annule pour $x^2 + 3x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 0{,}3$ et $x = -3{,}3$.

La dérivée est négative pour $x \in [0;\ 0{,}3]$;

La dérivée est positive pour $x \in [0{,}3;\ 1]$.



● *On tracera la courbe qui passe donc par un minimum pour* x = 0,3 m *en calculant les valeurs de* T^2 *pour* x = 0 (T^2 = 2,7); *pour* x = 0,3 (T^2 = 2,4), *pour* x = 1 (T^2 = 3,2).

ÉNONCÉ

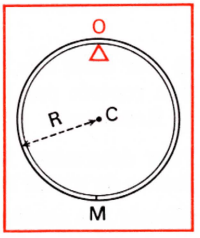
n° 81. Un cerceau en bois repose sur l'arête d'un couteau horizontal O, perpendiculaire au plan du cerceau. Soit *m* la masse du cerceau, R son rayon. Quelle est la longueur de son pendule simple synchrone?

REMARQUE A RETENIR

On appelle pendule simple synchrone d'un pendule composé, un pendule simple qui a la même période que ce pendule composé. Ainsi pour des amplitudes faibles la longueur ℓ du pendule simple synchrone est telle que $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{Mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

$\Longrightarrow \ell = \frac{J}{Ma}$.

CORRIGÉ



● *Soit* J *le moment d'inertie du cerceau par rapport à* O. *D'après le théorème de Huyghens* $J = J_c + mR^2$, *comme* $J_c = mR^2$ *on en déduit* $J = 2mR^2$.

● C *est le centre de gravité du cerceau :* OG = R = a.

● *Le pendule a pour période, pour de petites oscillations :*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m\,r^2}{mg\,R}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\,R}{g}} \qquad (1)$$

Soit ℓ *la longueur du pendule simple de même période* $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ (2)

CORRIGÉ

d'après (1) *et* (2) $\Longrightarrow \ell = 2R$. *La longueur du pendule simple synchrone est égale au diamètre du cerceau.*

ÉNONCÉ

❷ On fixe en M, point du cerceau diamétralement opposé à O, une bille d'acier, pratiquement ponctuelle, de masse m'. Quelle est la période T_0 des petites oscillations?

CORRIGÉ

- *Le moment d'inertie* J *est la somme du moment d'inertie du cerceau :* $2mR^2$ *et de la masse ponctuelle* M : $m'(2R)^2$, *d'où* $J = 2R^2(m + 2m')$.
- *Soit* G *le centre de gravité de l'ensemble, d'après la formule des barycentres* $(m + m')\,\overrightarrow{OG} = m\,\overrightarrow{OC} + m'\overrightarrow{OM}$, *projetons sur* $\overrightarrow{OG}$, *en posant* $OG = a$:

$$(m + m')\,a = (m + 2m')R.$$

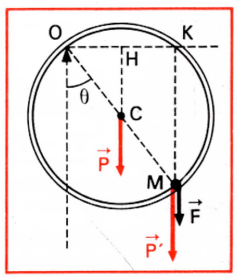
- *Pour petites oscillations*

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{(m + m')\,ga}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\,R^2\,(m + 2m')}{(m + 2m')\,Rg}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\,R}{g}}$$

La période est donc la même que lorsque le cerceau n'est pas surchargé.

ÉNONCÉ

❸ Un électro-aimant exerce sur la bille une force $\vec{F}$, constante, verticale, dirigée vers le bas. Déterminer la nouvelle période T.



- *Le moment d'inertie n'a pas changé.*
- *Déterminons la somme des moments des forces appliquées :*

$\mathcal{M} = P.OH + (F + P')\,OK = [PR + (F + P')2R]\sin\theta$

Si θ *reste petit, et en mesurant* θ *et* $\mathcal{M}$ *algébriquement :*

$\mathcal{M} = -(P + 2P' + 2F)\,R\theta$. *Le moment résultant est de rappel, proportionnel à l'élongation, de la forme* $\mathcal{M} = -C\theta$, *le mouvement est donc sinusoïdal, de période*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\,R^2\,(m + 2m')}{(P + 2\,P' + 2\,F)\,R}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\,R\,(m + 2m')}{P + 2\,P' + 2\,F}}$$

CORRIGÉ

Remarques :

— si $F \ll P + 2P'$, on peut dire qu'on passe de T_0 (résultat de la ❷) à ce résultat T en faisant varier $P + 2P'$ de 2F, d'où

$$\frac{\Delta T}{T_0} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta\,(P + 2\,P')}{P + 2\,P'} = -\frac{1}{2}\frac{2\,F}{P + 2\,P'} = -\frac{F}{P + 2\,P'}$$

— les forces $\vec{F}$ et $\vec{P'}$ s'appliquant au même point, on aurait pu écrire plus rapidement : J ne changeant pas cela revient à ajouter F à P'. Notons bien que ce type de raisonnement ne convient que si les deux forces s'appliquent au même point et que si les masses ne changent pas.

---

n° 82. Une sphère de rayon r, de masse m est accrochée à un fil inextensible, de masse négligeable, attaché à un point fixe O. Soit a la distance séparant O du centre C de la sphère. Quelle est la longueur du pendule simple synchrone de ce pendule composé (appelé pendule à boule).

ÉNONCÉ

Sachant que $J = ma^2 + \frac{2}{5}mr^2$, *on trouvera* $l = a + \frac{2\,r^2}{5\,a}$.

RÉPONSE

ÉNONCÉ

n° 83. Un pendule pesant, plein, homogène, en métal de masse volumique ρ oscille dans le vide. La période des petites oscillations est T_0. Lorsqu'il oscille dans l'air de masse volumique μ la période est T. Déterminer la petite différence $T - T_0$.
Application numérique : $\rho = 6{,}5.10^3$ kg/m³ $\quad \mu = 1{,}3$ kg/m³ $\quad T_0 = 2$ s.

CORRIGÉ

● *Quand le pendule n'est soumis qu'à son poids (et à la réaction de l'axe) c'est-à-dire lorsqu'il oscille dans le vide, sa période est* $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{Mga}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{Pa}}$ (1)

● *Dans l'air le moment d'inertie n'a pas changé.*

● *Dans l'air il apparaît une force supplémentaire : la poussée d'Archimède* $\vec{F}$, *appliquée en* G, *centre de gravité commun à l'air déplacé, et au pendule homogène. Le pendule est soumis aux moments de* $\vec{F}$ *et de* $\vec{P}$, *c'est-à-dire au moment de* $(\vec{P} + \vec{F})$ *puisque les forces s'appliquent au même point. D'où, en posant* $OG = a$ *et en appelant* θ *l'élongation (en remarquant que* $P > F$) : $\mathcal{M} = (P - F)\, a \sin\theta$; *pour de petites élongations et en mesurant* $\overline{\mathcal{M}}$ *et* θ *algébriquement* $\overline{\mathcal{M}} = -(P - F)\, a\, \theta$, *ce moment de forces est de la forme* $\overline{\mathcal{M}} = -C\theta$: *le mouvement est donc sinusoïdal de période* $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{(P - F)a}}$ (2)

● P *a subi la petite variation* $\Delta P = -F$, *en appliquant le théorème des petites variations relatives* $\dfrac{\Delta T}{T} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta P}{P} \Longrightarrow \dfrac{T - T_0}{T_0} = \dfrac{1}{2}\dfrac{F}{P}$.

● *Evaluons* F *et* P, *soit* V *le volume du pendule* : $P = mg = V\rho g$.
D'après le théorème d'Archimède $F = V\mu g$.

● *Finalement* $\dfrac{T - T_0}{T_0} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mu}{\rho} \Longrightarrow T - T_0 = 2 \times \dfrac{1}{2}\dfrac{1{,}3}{6{,}5.10^3} = 2.10^{-4}\text{s}.$

Remarques :
— La poussée d'Archimède $\vec{F}$ ne modifiant pas J, s'appliquant au même point que $\vec{P}$ cela revient donc à ajouter $\vec{F}$ à $\vec{P}$, par suite P devient P — F.
— On calculerait de la même façon, la période d'un pendule oscillant dans une cage en translation verticale d'accélération $\vec{\gamma}$. Nous savons que le mouvement relatif (du pendule par rapport à la cage) s'obtient en ajoutant la force d'inertie $\vec{I} = -m\vec{\gamma}$ aux forces appliquées : J n'est pas modifié $\vec{I}$ s'appliquant en G, cela revient à remplacer $\vec{P}$ par $\vec{P} + \vec{I}$ c'est-à-dire $\vec{g}$ par $\vec{g} - \vec{\gamma}$.

---

n° 84.

ÉNONCÉ

❶ Un pendule simple bat la seconde à O °C. De combien varie sa période lorsque la température passe à $\theta = 25$ °C? Le coefficient de dilatation linéaire $\lambda = 2.10^{-5}$ °C^{-1}.

CORRIGÉ

Seule la longueur du pendule varie : $l = l_0(1 + \lambda\theta) \Longrightarrow \dfrac{\Delta l}{l_0} = \lambda\theta$ (*voir* Pb 1, n° 2).

Il en résulte une variation de période (un pendule qui bat la seconde a pour période 2 s $= T_0$*)* :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Longrightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l} \Longrightarrow \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{1}{2}\lambda\theta \Longrightarrow \Delta T = 5.10^{-4}\text{s}.$$

ÉNONCÉ

❷ A quelle altitude z faudrait-il faire osciller le pendule pour enregistrer, depuis le niveau de la mer, la même variation de période que celle qui vient d'être calculée? Le rayon terrestre est $R = 6\,400$ km.

$\frac{\Delta g}{g} = \frac{-2z}{R}$ *(voir* Pb 1, n° 3, *cette formule est d'ailleurs souvent donnée pour les élèves de* D*).*

Seul g *varie d'où :*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Longrightarrow \frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g} = \frac{z}{R} \Longrightarrow z = \frac{R\Delta T}{T_0} = 1600\ \text{m} = 1{,}6\ \text{km}.$$

Remarque : *revoir le numéro* 4 *de* Pb 1.

CORRIGÉ

---

n° 85. Un pendule P oscille devant le balancier d'une horloge, H, qui bat la seconde. Ils passent en même temps, dans le même sens par leurs positions d'équilibre : c'est une coïncidence. Le pendule P oscillant plus lentement que H (on dit qu'il retarde), les deux pendules ne restent plus en coïncidence. On constate qu'au bout de l'intervalle de temps $t = 1$ mn 42 s, une seconde coïncidence se produit. Déterminer la période T de P.

ÉNONCÉ

La période du balancier H *est* $T_0 = 2$ s.

• *Pendant l'intervalle de temps* t, H *accomplit* n *oscillations ;* P *en accomplit une de moins* (P *retarde*) *: ils se retrouvent ainsi à leurs positions d'équilibre.*

Donc $\boxed{t = n\,T_0 = (n-1)\,T}$

Eliminons n : $n = \frac{t}{T_0}$, *d'où* $T = \frac{t}{n-1} = \frac{tT_0}{t-T_0} = 2{,}04$ s.

CORRIGÉ

Remarques :

— Il peut arriver que *n* ne soit pas entier, cela veut dire que la 2e coïncidence ne se produit pas exactement lors du passage par la position d'équilibre. Pratiquement, si $T \simeq T_0$ la coïncidence persiste en apparence quelques secondes, il en résulte une incertitude sur *t*.

— Si le pendule P est entretenu et constitue une horloge H′ : on doit dire que pendant le temps *t* H fait 102 battements, H′ n'en fait que 100, autrement dit l'aiguille de H′ indique 2 s de moins. H′ retarde donc de T_0 tous les temps *t*.

---

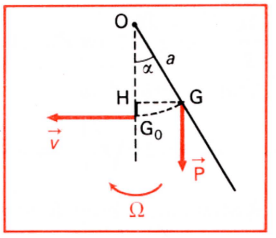
n° 86. Un pendule pesant est constitué par une tige homogène de longueur ℓ, de masse *m*, mobile autour d'un axe horizontal fixé à son extrémité. Son moment d'inertie est donné par $J = \frac{m\ell^2}{3}$. Il est écarté d'un angle α de sa position d'équilibre stable puis abandonné sans vitesse. Quelle est la vitesse *v* de son centre de gravité lorsqu'il passe par sa position d'équilibre ?
On donne $g \doteq 10$ u.S.I $\quad \ell = 60$ cm $\quad$ *a)* $\alpha = 5°\,40'$ $\quad$ *b)* $\alpha = 90°$.

ÉNONCÉ

• Lorsque α est important, l'équation horaire n'est pas connue, utilisez le théorème de l'énergie cinétique, en remarquant que l'énergie d'un solide en rotation est $\frac{1}{2}J\omega^2$ et non pas $\frac{1}{2}mv_G^2$: il est interdit pour calculer l'énergie cinétique de concentrer la masse du système en G.

• Lorsque α est faible, le mouvement est pratiquement sinusoïdal, on peut également utiliser l'équation horaire qu'on sait alors déterminer.

CONSEIL



CORRIGÉ

● **Solution générale** *(α petit ou grand).*

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre le départ et le passage par la position d'équilibre :

$$E_{C_1} = 0 \qquad E_{C_2} = \frac{1}{2} J\Omega^2.$$

La réaction de l'axe ne travaille pas, seul le poids effectue le travail $\overline{W}_{\vec{P}} = P.HG_0 = mg(OG_0 - OH)$, *comme* $OG_0 = a$ *et que* $OH = a\cos\alpha$

$$\overline{W}_{\vec{P}} = mga(1 - \cos\alpha)$$

$$E_{C_2} - E_{C_1} = \overline{W}_{\vec{P}} \Longrightarrow \frac{1}{2} J\Omega^2 = mga(1 - \cos\alpha) \Longrightarrow \Omega = \sqrt{\frac{2\,mga(1 - \cos\alpha)}{J}} \cdot (1)$$

Comme $J = \frac{m\ell^2}{3}$ $\quad a = \frac{\ell}{2} \Longrightarrow \Omega = \sqrt{\frac{3g(1 - \cos\alpha)}{\ell}}$.

La vitesse du centre de gravité $v = \Omega a$.
Pour $\alpha = 5^\circ\,40'$ *on trouvera* $v = 0{,}15$ m/s. *pour* $\alpha = 90^\circ$ $v = 2{,}12$ m/s.

● **Solution particulière** *(α petit).*

Dans ce cas le pendule a un mouvement sinusoïdal d'équation horaire $\theta = \alpha \sin(\omega t + \varphi)$.

Comme $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}} = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = \sqrt{\frac{mga}{J}}$. *Dérivons cette équation horaire*

$$\overline{\Omega} = \alpha\omega\cos(\omega t + \varphi).$$

Lors du passage par la position d'équilibre $\sin(\omega t + \varphi) = 0 \Longrightarrow |\cos(\omega t + \varphi)| = 1$.

Par suite la vitesse angulaire mesurée arithmétiquement est alors $\Omega = \alpha\omega = \sqrt{\frac{mga}{J}} \cdot \alpha$ (2)

Montrons que pour α petit les relations (1) *et* (2) *sont en accord : si α petit* $\cos\alpha \simeq 1 - \frac{\alpha^2}{2}$

$\Longrightarrow 1 - \cos\alpha \simeq \frac{\alpha^2}{2}$, *la relation* (1) *devient* $\Omega = \sqrt{\frac{mga\alpha^2}{J}} = \sqrt{\frac{mga}{J}} \cdot \alpha$.

ÉNONCÉ

❷ Le pendule précédent est remplacé par son pendule simple synchrone de longueur L que l'on déterminera. Ce pendule simple est écarté : *a)* de $\alpha = 5^\circ\,40'$; *b)* de $\alpha = 90^\circ$, de sa position d'équilibre stable. Quelle est sa vitesse linéaire *v* lors du passage par la position d'équilibre ?

● *Calculons* L : $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. $\qquad L = \frac{J}{ma} = \frac{m\ell^2}{2m\ell/2} = \frac{2\ell}{3} = 0{,}4$ m.

CORRIGÉ

Solution générale *(corrigé abrégé).*

L'énergie cinétique du pendule simple peut être aussi bien caractérisée par $\frac{1}{2}mv^2$ *(meilleure solution pour ce problème où on demande* v*) ou par* $\frac{1}{2}J\omega^2$, *d'où les deux méthodes :*

$$E_{C_2} - E_{C_1} = \overline{W}_{\vec{P}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL(1 - \cos\alpha)$$

$$v = \sqrt{2gL(1 - \cos\alpha)}$$

$$E_{C_2} - E_{C_1} = \overline{W}_{\vec{P}}$$

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = mgL(1 - \cos\alpha) \text{ avec } J = mL^2$$

$$\text{et } \omega = \frac{v}{L} \Longrightarrow v = \sqrt{2gL(1 - \cos\alpha)}$$

Pour $\alpha = 5^\circ\,40'$, *on trouve* $v = 0{,}2$ m/s; *pour* $\alpha = 90^\circ$, $v = 2{,}83$ m/s.

Solution particulière (α *petit*).

L'équation horaire $\theta = \alpha \sin(\omega t + \varphi)$ *conduit à* $\overline{\Omega} = \alpha\omega \cos(\omega t + \varphi)$ *et pour* $\theta = 0$ *à* $\Omega = \alpha\omega$. *Puisque* $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{L}}$, *d'où* $\Omega = \alpha\sqrt{\frac{g}{L}}$

$$\text{et } v = L\Omega = \alpha\sqrt{gL} = 0{,}2 \text{ m/s.}$$

Remarques :

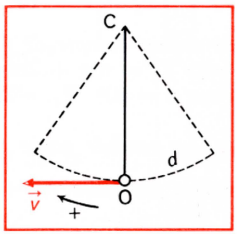
— Si α est petit : $v = \sqrt{2gL(1 - \cos\alpha)} = \alpha\sqrt{gL}$ puisque $1 - \cos\alpha \simeq \frac{\alpha^2}{2}$.

— Le pendule composé et son pendule simple synchrone ont la même période T, la même pulsation ω. S'ils ont la même amplitude angulaire, α, petite, les vitesses angulaires Ω sont les mêmes.

CORRIGÉ

❸ Ce pendule simple est écarté de sa position d'équilibre d'une distance d très inférieure à L, puis abandonné sans vitesse. Quelle est sa vitesse linéaire v lors du passage par la position d'équilibre. On donne $d = 2$ cm.
(La longueur de la corde, d, est pratiquement égale à celle de l'arc de cercle puisque $d \ll L$.)

ÉNONCÉ



● *La masse est animée d'un mouvement circulaire sinusoïdal d'équation horaire*

$$s = d \sin(\omega t + \varphi) \qquad \textit{avec } \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Dérivons l'équation horaire par rapport au temps, nous savons que

$$s' = v = d\,\omega \cos(\omega t + \varphi).$$

Lors du passage par la position d'équilibre

$$\sin(\omega t + \varphi) = 0 \Longrightarrow |\cos(\omega t + \varphi)| = 1$$
$$\Longrightarrow v = d\omega = 0{,}1 \text{ m/s.}$$

Remarque : d *est petit, l'arc de cercle parcouru est pratiquement confondu avec la tangente, le mouvement est pratiquement rectiligne sinusoïdal.*

● Résumons ces méthodes :

CORRIGÉ

		PENDULE SIMPLE		
		Pend. COMPOSÉ		
α *petit*	α *quelconque*	$E_c = \frac{1}{2}J\Omega^2$ $h = a(1 - \cos\alpha)$	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$ $h = \ell(1 - \cos\alpha)$	*Théorème de l'énergie cinétique*
		$\theta = \alpha \sin\omega t$ $\overline{\Omega} = \alpha\omega \cos\omega t$	$s = a \sin\omega t$ $\overline{v} = a\,\omega \cos\omega t$	*Dériver l'équation horaire*
		Coordonnée angulaire	*Coordonnée curviligne*	

---

n° 87. Un pendule simple, de longueur l, de masse m, oscille avec une amplitude α. Déterminer la tension du fil de suspension :

❶ Lorsque le pendule passe par sa position d'équilibre;

❷ Lorsqu'il est à l'une de ses positions extrêmes.

Application numérique $\alpha = 60^0$ $m = 100$ g $g = 10$ m/s^2.

ÉNONCÉ

CONSEIL

Utiliser la relation fondamentale de la dynamique, projeter sur le fil.

Le point matériel constituant le pendule est soumis à son poids $\vec{P}$ *et à la traction du fil* $\vec{T}$. *Ecrivons la relation fondamentale de la dynamique :*

$$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{\gamma} \qquad (1)$$

❶ *Le pendule passe par sa position d'équilibre avec la vitesse* v. *D'après le théorème de l'énergie cinétique*

$$\frac{1}{2}\,mv^2 - 0 = mgl\,(1 - \cos\alpha)\ (2)\ (\textit{voir exercice n}^o\ 86).$$

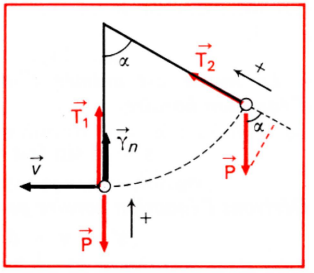
L'accélération $\vec{\gamma}$ *a une composante normale, centripète* $\vec{\gamma}_n$ *de module* $\frac{v^2}{l}$ *et une composante tangentielle* $\vec{\gamma}_t$ *(revoir les tableaux de cinématique).*

CORRIGÉ

● *En projetant sur la direction du fil seule* $\vec{\gamma}_n$ *intervient Projetons donc la relation* (1) *sur la verticale :*

$$T_1 - P = m\gamma_n \Longrightarrow T_1 = mg + m\frac{v^2}{l}$$

en tenant compte de (2)
$\Longrightarrow T_1 = mg + 2mg(1 - \cos\alpha) = mg(3 - 2\cos\alpha)$
Pour $\alpha = 60^o$ $T_1 = 2N$.

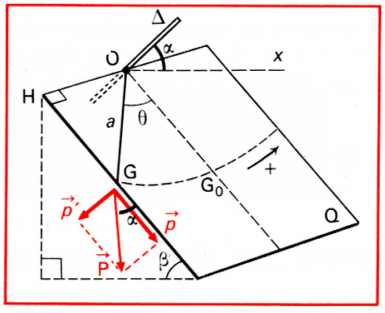


❷ *Le pendule passe par sa position extrême à vitesse nulles, par suite* $\gamma_n = \frac{v^2}{l} = 0$.

Projetons la relation (1) *sur la direction du fil :* $T_2 - P\cos\alpha = m\gamma_n = 0$
d'où $T_2 = mg\cos\alpha = 0{,}5$ N.

ÉNONCÉ

n° 88. Soit T_0 la période des petites oscillations d'un pendule pesant oscillant autour d'un axe horizontal Δ. Quelle est sa période T lorsque Δ est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale?



● *Lorsque* $\alpha = 0$, $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{Mga}}$.

● *Lorsque* Δ *est incliné d'un angle* α *sur l'horizontale* ox, *le centre de gravité* G *du pendule oscille dans un plan* Q ⊥ Δ, *incliné d'un angle* β *complémentaire de* α.

● *A l'équilibre* G *est en* G_0, OG_0 *est une ligne de plus grande pente.*

CORRIGÉ

● *Projetons* $\vec{P}$ *sur* Q. *Nous décomposons de la sorte* $\vec{P}$ *en* $\vec{p}$ *parallèle à* OG_0 *et* $\vec{p}'$ *parallèle à* Δ.

$$\vec{P} = \vec{p} + \vec{p}' \Longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\vec{P}} = \overline{\mathcal{M}}_{\vec{p}} + \overline{\mathcal{M}}_{\vec{p}'} = \overline{\mathcal{M}}_{\vec{p}} \textit{ puisque } \vec{p}' \textit{ est } // \Delta$$

$\mathcal{M}_{\vec{P}} = p\ OH = (mg\cos\alpha)\ .\ (a\sin\theta)$; *si* θ *est petit et en mesurant* $\overline{\mathcal{M}}_P$ *et* θ *algébriquement dans le même sens* $\overline{\mathcal{M}}_{\vec{P}} = -mga\cos\alpha\ .\ \theta$. *Ce moment est de la forme* $-C\theta$ *: le mouvement est donc sinusoïdal de période*

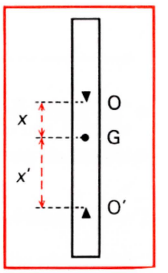
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga\cos\alpha}} = \frac{T_0}{\sqrt{\cos\alpha}} \Longrightarrow T\sqrt{\cos\alpha} = T_0.$$

n° 89. Soit un pendule pouvant osciller successivement autour de deux axes o et o'. Par un choix convenable ou un réglage convenable ces deux axes peuvent satisfaire aux cinq conditions suivantes (ils forment alors un couple d'*axes réciproques*) : 1 Les deux axes sont parallèles. 2 Le centre de gravité G est dans le plan des deux axes. 3 Les axes sont de part et d'autre de G. 4 Les axes ne sont pas équidistants de G. 5 Les périodes d'oscillation autour de o et o' sont égales.
Ces axes étant déterminés, le pendule est dit *réversible*. On démontre que le pendule simple synchrone d'un pendule réversible a pour longueur $l = oo'$ (distance des axes).

REMARQUE A RETENIR

ÉNONCÉ

Un pendule P de centre de gravité G, de masse m a même période d'oscillation autour de deux axes oo' réciproques (les conditions 1 2 3 4 5 sont satisfaites). Soit J le moment d'inertie du pendule par rapport à G. On pose $OG = x$; $O'G = x'$.



1 Exprimer J en fonction de x et x'. On suppose dans tout le problème que les oscillations sont de faible amplitude.

CORRIGÉ

- *Quand le pendule oscille autour de* 0 $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J + mx^2}{mgx}}$.
- *Quand le pendule oscille autour de* 0′ $\quad T' = T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J + mx'^2}{mgx'}}$.
- *On en déduit*

$$\frac{J + mx^2}{x} = \frac{J + mx'^2}{x'} \Longrightarrow Jx' + mx^2x' = Jx + mx'^2x$$

d'où $J(x' - x) = mxx'(x' - x)$. *Comme* $x' \neq x \Longrightarrow J = mxx'$.

ÉNONCÉ

2 Quelle est la longueur l du pendule simple synchrone ?

CORRIGÉ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{J + mx^2}{mgx}}$$

comme $\quad J = mxx' \Longrightarrow l = \dfrac{mxx' + mx^2}{mx} = x + x' = 00'.$

ÉNONCÉ

3 La distance $oo' = 1$ m. P oscille devant le balancier H d'une horloge, moins vite que H. H bat la seconde. L'intervalle de temps qui sépare une première d'une quatrième coïncidence est $t = 33$ mn 20 s. Quelle est la valeur de g au lieu de l'expérience ?

CORRIGÉ

La période de H *est* $T_0 = 2$ s. *Soit* t *l'intervalle de temps entre deux coïncidences consécutives :* $t = \dfrac{2000}{3}$ s. *Pendant la durée* t, H *fait* n *oscillations*, P *qui oscille moins vite* $(n - 1)$.

D'où $t = nT_0 = (n - 1)\,T$ *on élimine* n *ce qui conduit à* $T = \dfrac{tT_0}{t - T_0} = 2{,}006$ s.

La période de ce pendule reversible est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \textit{avec} \quad l = 00' = 1 \text{ m} \quad \textit{d'où} \quad g = 9{,}807 \text{ m/s}^2.$$

Cette méthode donne g avec une très bonne précision : l est bien déterminée et est mesurable avec précision, d'autre part la méthode des coïncidences détermine T avec une grande précision.

N° 89 bis

ÉNONCÉ

❶ On rappelle qu'un aimant placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ est soumis à un couple magnétique de rappel, de moment Γ, tel que : $\Gamma = MB \sin \theta$. M étant le moment magnétique de l'aimant, Γ l'angle que fait le vecteur $\vec{B}$ avec la direction Sud-Nord de l'aimant. Un petit aimant horizontal de moment magnétique M peut tourner sans frottement autour d'un axe vertical passant par son milieu. Soit J son moment d'inertie. L'aimant est placé dans un champ magnétique horizontal. Montrer que si l'on écarte l'aimant d'un petit angle par rapport à sa position d'équilibre stable, son mouvement est un mouvement sinusoïdal de période

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{MB}}$$

CORRIGÉ ABRÉGÉ

- *Le poids de l'aimant et la réaction de l'axe ont des moments nuls.*
- *Pour de petites élongations* θ, *en mesurant* $\overline{\Gamma}$ et θ *algébriquement dans le même sens* $\overline{\Gamma} = -MB\theta$. $\overline{\Gamma}$ *est de la forme* $-C\theta$ *d'où* $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{MB}}$.

ÉNONCÉ

❷ Soit $T_0 = 5$ s, la période des petites oscillations de l'aimant dans le champ magnétique terrestre. La composante horizontale du champ magnétique terrestre vaut $B_0 = 2.10^{-5}$ tesla.
Soit $T = 0{,}5$ s, la période des petites oscillations du même aimant placé dans l'entrefer d'un électroaimant. Calculer l'induction B du champ magnétique horizontal qui règne dans l'entrefer. Calculer la vitesse angulaire maximale de l'aimant quand il oscille dans l'entrefer avec une amplitude angulaire de 0,1 rd. (*D'après Bac.*)

RÉPONSES

- $\frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{B}{B_0}}$ d'où $B = 2.10^{-3}$T.
- $\theta = \alpha \sin \omega t \implies \Omega_{maxi} = \alpha\omega = 1{,}26$ rd/s.

Contrôle n° 1. Sur une voie rectiligne, horizontale, un wagon de masse $m = 10$ t, animé d'une vitesse $v = 10$ m/s, heurte un wagon immobile de même masse :

1. Si le choc est élastique, que font les wagons après le choc ?
2. Si les deux wagons s'accrochent, quel est leur mouvement ultérieur ?

Contrôle n° 2. Sur un plan horizontal, glissent sans frottements deux solides de masse $m_1 = 100$ g et $m_2 = 200$ g. m_1 arrive avec une vitesse $v_1 = 6$ m/s sur m_2 immobile, rebondit à angle droit avec une vitesse $v'_1 = 3$ m/s. Dans quelle direction et avec quelle vitesse se trouve projeté m_2 à la suite du choc ? On admettra que les réactions équilibrent les poids.

Contrôle n° 3. Une fusée a une masse totale de 15 t au départ. La masse des produits réagissant dans le moteur est 8 t. La fusée consomme ces produits en 40 s, le débit étant constant. La poussée $\vec{F}$ exercée par le moteur est une force constante égale à 2.10^5 N. Dans tout le problème $g = 10$ m/s².

1. A quelle vitesse les gaz sont-ils éjectés ? (On mesure cette vitesse par rapport à la fusée.)
2. La fusée est mobile, horizontalement, sans frottements (sur un chariot par exemple). Quelle est son accélération au départ ? Dans le cas où il serait possible de maintenir ce mouvement horizontal, exprimer l'accélération en fonction du temps.
3. La fusée part verticalement du sol. Quelle est son accélération au départ ? En négligeant la résistance de l'air, et en supposant la trajectoire rectiligne verticale, exprimer l'accélération en fonction du temps. En fait des mesures directes montrent qu'au bout de 20 s l'accélération est 8 m/s², calculer la résistance de l'air sur le mobile à cet instant.
4. Dans le cas précédent les accélérations sont mesurées à l'aide d'un ressort à boudin contenu dans un tube parallèle à l'axe de la fusée. Sur le ressort est fixée une masselotte cylindrique munie d'un index. Au repos le poids du cylindre raccourcit le ressort de 1 cm, l'index est devant la division o d'une graduation. Etablir la relation qui lie le déplacement x de l'index à l'accélération γ de la fusée. Dessiner en vraie grandeur la graduation (en m/s²) de l'appareil.
5. Evaluer en km/h la vitesse qu'atteindrait la fusée dans les conditions du 2° ; à la fin du fonctionnement du moteur.

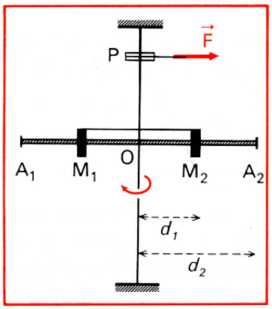
On donne : une primitive $y = \dfrac{a}{b-t}$ est $Y = -2{,}3\,.\,a \log (b-t)$. *(D'après Bac.)*

Contrôle n° 4. D'un point O on lance verticalement, vers le haut, deux billes B_1 et B_2 de masse m_1 et $m_2 = 2\,m_1$, la bille B_1 part à l'instant $t = 0$ à la vitesse $v_1 = 20$ m/s, la bille B_2 part à l'instant $t = 2$ s à la vitesse $v_2 = 20$ m/s. $g = 10$ m/s². On prendra un axe vertical orienté vers le haut.

1. Quand et où a lieu le choc ?
2. Quelles sont les vitesse $\overline{v'}_1$ et $\overline{v'}_2$ de B_1 et B_2 juste avant le choc ?
3. Quelles sont les vitesses $\overline{v''}_1$ et $\overline{v''}_2$ de B_1 et B_2 juste après le choc ? On suppose le choc parfaitement élastique et que les billes restent toujours sur la même verticale.
4. A quels instants t_1 et t_2 les billes B_1 et B_2 repassent-elles par O ? A quelle hauteur au-dessus de O B_1 monte-t-elle ?

Contrôle n° 5. Une balle à l'intérieur du canon est soumise à une force variable $F = 5.10^3 (1 - 10^3 t)$ Newtons, la balle à l'instant $t = 0$ est à vitesse nulle, à l'instant $t = 10^{-3}$ s sort du canon à une vitesse qu'on demande d'évaluer. La masse de la balle est 5 g.

Contrôle n° 6. Soit le système dessiné ci-contre, tournant sans frottement autour d'un axe vertical. Un fil de masse négligeable passant dans la gorge de la poulie P de rayon r, est tiré par une force $\vec{F}$. Le moment d'inertie du système sans les masses est J_0.

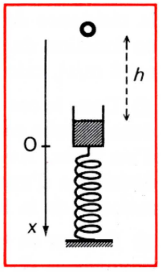


❶ Les deux masses M_1 et M_2 ponctuelles sont à la distance d_1 de l'axe. Pendant quelle durée Δt, doit agir la force $\vec{F}$, constante, pour lancer le système à N_1 tr/s? Les masses de M_1 et M_2 sont égales à m.
Application numérique : $r = 10$ cm; $m = 1$ kg; $J_0 = 10^{-2}$ u. SI; $d_1 = 10$ cm; $F = 1$ N; $N_1 = 5$ tr/s.

❷ Arrivé à cette vitesse N_1 on annule F. On brûle le fil qui retenait M_1 et M_2. Les deux masses glissent sur la tige A_1OA_2 et viennent contre les butées A_1 et A_2, à une distance $d_2 = 20$ cm de O. Quelle est alors la vitesse de rotation N_2 tr/s du système? Calculer la variation d'énergie cinétique.

Contrôle n° 7. Une mitraillette tirant horizontalement, projette des balles de 10 g, à raison de 90 par minute. La vitesse des balles à la sortie du canon est 1 000 m/s. Quelle force horizontale doit exercer, en moyenne, le tireur pour empêcher l'arme de reculer?

Contrôle n° 8. Un ressort vertical supporte un récipient contenant du sable, de masse totale $m = 100$ g. La position d'équilibre est choisie comme origine des espaces.
Une bille d'acier de masse m est lâchée sans vitesse d'une hauteur $h = 2$ cm au-dessus du sable, dans lequel elle s'incruste.



❶ Quelle est la vitesse prise par le récipient sous l'effet du choc?

❷ Quelle est la période des oscillations du récipient après le choc?

❸ Le choc définit l'origine des temps, écrire l'équation horaire du mouvement oscillatoire. On donne : raideur du ressort : $k = 50$ N/m; $g = 10$ m/s².

Contrôle n° 9. Pour construire un parachute, on admet que la résistance de l'air R est donnée, en fonction de la vitesse V et de la surface de base S de l'appareil déployé, par la formule :

$$R = KS\,V^2.$$

En prenant comme unités le mètre, le newton et la seconde, on a : $K = 1{,}23$ lorsque l'air est à la pression atmosphérique normale (76 cm de mercure) et à 15 °C. Pour des conditions différentes, on admet que K est proportionnel à la masse volumique de l'air.

❶ Déterminer quelle doit être la surface S pour que le parachute prenne une vitesse limite de 3,50 m/s dans l'air à 15 °C et sous la pression normale, le poids total (homme et appareil) étant 950 N.

❷ Le parachute ne s'ouvre qu'après une descente en chute libre de 30 m, pendant laquelle il ne subit de la part de l'air qu'une résistance négligeable. Le temps de l'ouverture est de 1,5 seconde et pendant ce temps l'accélération négative de l'appareil peut être regardée comme constante. Déterminer la tension du câble supportant la charge.

❸ Calculer l'influence sur la vitesse limite d'une variation de pression de 1 mm de mercure et d'une variation de température de 1°, en supposant que l'air suive les lois des gaz parfaits. On donne $g = 9{,}80$ m/s². *(Bac.)*

Contrôle n° 10. Un parachute de masse 20 kg porte une charge de P kg. Sa projection horizontale a une surface de 25 m². Il est abandonné sans vitesse initiale, dans un air calme, à une hauteur de 250 m au-dessus du sol.

❶ S'il ne s'ouvre pas, avec quelle vitesse frappe-t-il le sol?

❷ On suppose qu'il s'ouvre et que la vitesse limite atteinte au moment du choc sur le sol est 10 fois plus petite que la vitesse précédemment calculée. Quelle est la valeur de P?

❸ On suspend P au crochet d'un dynamomètre (gradué en newtons) fixé au parachute.
a) Que marque-t-il pendant la chute (❶) où la résistance de l'air est négligeable?
b) Que marque-t-il vers la fin de la chute (❷)?
c) Que marquerait-il si l'appareil tombait avec une accélération constante de 3 m/s²?

❹ On suppose maintenant que P = 30 kg. Calculer la vitesse limite atteinte. Calculer le temps au bout duquel le parachute devrait s'ouvrir pour qu'à cet instant il possède cette vitesse.
Données : $g = 9{,}8$ m/s². La résistance opposée par l'air à la chute d'une surface plane horizontale de S m² est $R = 0{,}8\ S\ v^2$ newtons, la vitesse v étant mesurée en m/s. *(Bac.)*

Contrôle n° 11. A) Un barreau homogène BD long de 20 cm peut osciller horizontalement par la torsion d'un fil vertical AO fixé en A et dont l'axe passe par le centre O du barreau; la durée de 10 oscillations est de 100 secondes.
On surcharge le barreau à l'aide de deux petites masses m et m' de 6,4 g chacune, placées en B et D; la durée de 10 oscillations devient 105 secondes. Calculer :

❶ le moment d'inertie J du barreau par rapport à l'axe AO et la constante de torsion C du fil;

❷ la vitesse angulaire du barreau (sans les surcharges) quand il passe à sa position d'équilibre au cours d'oscillations d'amplitude égale à 1 radian;

B) Le barreau a une masse de 375 g, il est maintenant suspendu par son extrémité B et peut osciller comme un pendule pesant composé. Calculer :

❶ la période des petites oscillations;

❷ la vitesse angulaire du barreau quand il passe à sa position d'équilibre au cours d'oscillations d'amplitude égale à 90 degrés.
On donne : $g = 9{,}80$ u. SI.
On exprimera les résultats avec trois chiffres significatifs exacts. *(Bac.)*

Contrôle n° 12. Un pendule P, que l'on considérera comme simple, formé d'une sphère de 100 g, suspendue à un fil, est mobile autour d'un axe horizontal.

❶ On fait osciller ce pendule devant le balancier d'une horloge qui bat la seconde. On constate que le pendule et le balancier passent simultanément par la verticale, dans le même sens, toutes les 11 mn 8 s, l'horloge allant plus vite. Quelle est la période du pendule?

❷ Quelle est la longueur du pendule? $g = 9{,}8$ m/s².

❸ Le pendule étant au repos, on l'écarte d'un angle α_0 tel que $\alpha_0 = 0{,}1$ rd et on le lâche avec une vitesse initiale Ω_0 à l'instant $t = 0$. (Les élèves de D prendront $\Omega_0 = 0$, les élèves de C et E $\Omega_0 = 0{,}1$ rd/s.)

a) Ecrire l'équation horaire du mouvement, exprimer la vitesse angulaire $\overline{\Omega}$ en fonction du temps.

b) Quelle est l'énergie cinétique du pendule lorsqu'il passe à la verticale?

c) Quelle est la tension du fil soutenant le pendule lorsque celui-ci passe à la verticale?

d) Jusqu'à quelle hauteur le pendule va-t-il remonter?

Contrôle n° 13.

❶ A l'extrémité d'une tige de laiton de masse m, de longueur l, est fixée une bille d'acier B, de rayon négligeable, de masse m'. Ce dispositif oscille autour d'un axe horizontal D soudé à l'extrémité O de la tige. Evaluer la période et la pulsation ω des petites oscillations. Le moment d'inertie de la tige par rapport à D est $1/3\ m\,l^2$. On donne : $m = 60$ g; $l = 64$ cm; $m' = 70$ g; $g = 10$ m/s².

❷ Ce pendule incliné d'un angle α par rapport à la verticale est abandonné sans vitesse. Exprimer la vitesse v de B lors d'un passage par la position d'équilibre en fonction de ω et α. Application numérique $\alpha = 60^0$.

❸ L'axe D est incliné d'un angle β par rapport à l'horizontale. Exprimer la période des petites oscillations T en fonction de la période T_0 déterminée au 1° et en fonction de β. Que se passe-t-il lorsque $\beta = 90^0$?

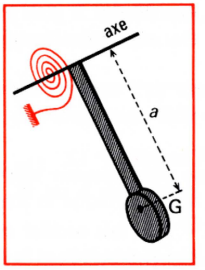
❹ L'axe D est de nouveau horizontal. On dispose sous le pendule un électro-aimant, il exerce sur la bille d'acier B une force d'attraction $\vec{F}$. La période subit de ce fait une faible variation $|\Delta T| = 0{,}1$ s. Quel est le sens de cette variation? Evaluer F. (On supposera $\vec{F}$ toujours verticale de module F constant.)

Contrôle n° 14.

❶ Le balancier d'une horloge de masse $m = 500$ g, dont le centre de gravité est à $a = 80$ cm de l'axe de rotation, bat la seconde, lorsque l'horloge est à l'altitude $h = 0$ où $g = 9{,}80$ m/s². Déterminer son moment d'inertie J.

❷ L'horloge est amenée à 3 200 m d'altitude. Montrer que de ce fait elle cesse d'indiquer l'heure exacte. De combien avance (ou retarde) -t-elle en un jour? Le rayon terrestre est R = 6 400 km.

❸ Afin de corriger l'effet d'altitude, on adapte au balancier un ressort spiral. Quelle doit être sa constante de rappel C (on supposera que lorsque le pendule a son centre de gravité G en dessous de l'axe, le ressort spiral est au repos).



❹ L'horloge, sans le ressort, est installée dans un module spatial qui part verticalement, de l'altitude $h = 0$ avec une accélération constante $\gamma = 1$ m/s². Quelle est alors la période des petites oscillations de son balancier?

❺ Le module est satellisé, il décrit une orbite circulaire autour de la Terre, l'horloge restant constamment verticale. Que peut-on dire du fonctionnement de l'horloge? On admettra que, dans le module, les champs de pesanteur et d'inertie centrifuge sont pratiquement uniformes.

Contrôle n° 15. Un pendule est constitué par une tige métallique OA, de masse négligeable, mobile autour d'un axe horizontal perpendiculaire à la tige en son extrémité O, et supportant à l'autre extrémité A une masse M supposée ponctuelle. Ce pendule est assimilable à un pendule simple de longueur OA. Il effectue des oscillations de *faible amplitude*.
Le pendule battant la seconde à 0 °C ($T_0 = 2$ s) en un lieu où $g = 9{,}81$ u. S.I., calculer la longueur OA $= l_0$ à cette température.

❶ La température s'élève à 20 °C. Quelle variation relative de période en résulte-t-il, sachant que le coefficient de dilatation linéaire de la tige qui soutient la masse M est

$$\lambda = 1{,}85 \times 10^{-5} ?$$

Ce pendule constitue le balancier d'une horloge dont la marche est exacte à 0 °C. Cette horloge avance-t-elle ou retarde-t-elle lorsque la température s'élève à 20 °C? De combien par jour?

❷ A la température 20 °C, la longueur de la tige du pendule est l.
On fixe au milieu de la tige (à la distance $\frac{1}{2}$ de l'axe O) une petite masse ponctuelle m. Calculer la période de ce pendule composé, en fonction de l, M et m. Montrer que la présence de m diminue la période.
Quelle doit être la valeur de m pour que le pendule ainsi modifié batte rigoureusement la seconde à 20 °C?
On donne : M $= 0{,}500$ kg.

N. B. — *On simplifiera les calculs en tenant compte de ce que* $\frac{m}{M}$ *est petit par rapport à l'unité.*

(Bac.)

Contrôle n° 16.

❶ Une sphère de dimensions négligeables, de masse m, est suspendue par un fil. La durée de 100 petites oscillations est t. Evaluer la longueur du fil ainsi que l'incertitude absolue sur cette détermination. Application numérique : $t = 3$ mn 20,6 s; $g = 9{,}81$ m/s².

❷ L'expérience précédente a été faite à 0 °C. On recommence à la température θ °C. Soit λ le coefficient de dilatation linéaire du fil. Quelle variation de la période en résulte-t-il? Est-elle appréciable compte tenu des incertitudes de la mesure décrite au ❶?
Application numérique : $\lambda = 2.10^{-5}$; $\theta = 25$ °C.

❸ L'expérience précédente ❷ a été faite à Paris (latitude 49°). A quelle latitude L faut-il faire osciller le pendule, à la température θ, pour que la période soit à nouveau celle du ❶? On admettra que l'intensité de pesanteur varie uniformément depuis l'équateur (9,78 N/kg, latitude 0) jusqu'au pôle (9,83 N/kg, latitude 90°).

❹ Le balancier d'une horloge battant la seconde oscille devant le pendule simple dans les conditions du ❶. Quel est l'intervalle de temps t, qui sépare deux coïncidences successives? Comment varie t lorsque la température est amenée à θ °C? Sachant que l'on peut repérer l'instant d'une coïncidence à 2 s près, cette variation est-elle appréciable?

Contrôle n° 17. Un pendule est constitué par un fil et une bille A de masse 100 g, de masse volumique 8 g/cm³. La distance OG de l'axe d'oscillation au centre de la bille vaut 1,8 m. $g = 9{,}8$ m/s².

❶ Sachant que le rayon de la bille est $r = 3$ cm, $J = \frac{2}{5} m r^2$, quelle erreur fait-on en assimilant ce pendule à un pendule simple? Dans la suite du problème le pendule sera considéré comme pendule simple.

❷ Le pendule effectue des oscillations d'amplitude 5°. Calculer la période T_0 de ces oscillations. Comment varie la vitesse angulaire du pendule en fonction du temps. En déduire la vitesse linéaire de G au passage à sa position la plus basse.

❸ Le pendule effectue maintenant des oscillations d'amplitude $\alpha = 30^0$. Son mouvement est périodique mais n'est plus sinusoïdal. Sa période est donnée par $T = T_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)$, α en rd. En déduire la variation relative de période $\frac{T - T_0}{T_0}$.

A quelle vitesse linéaire G passe-t-il par sa position la plus basse?

❹ La bille A, de ce pendule, écartée de 30^0 est abandonnée à elle-même sans vitesse initiale. Elle rencontre en arrivant à la verticale une bille B de masse 50 g initialement au repos. En supposant que le choc est parfaitement élastique déterminer les vitesses de A et B après le choc.

❺ Le pendule oscille successivement dans l'air et dans le vide. Quelle est la variation relative de sa période? La masse volumique de l'air est $1{,}3 . 10^{-3}$ g/cm³. Combien faudrait-il compter d'oscillations au minimum pour que cette variation soit sensible, sachant que le chronomètre utilisé permet la détermination d'un intervalle de temps à 0,2 s près?

Contrôle n° 18. Un métronome est constitué par deux masses M et m qu'on supposera concentrées en deux points respectifs A et a situés sur une tige de masse négligeable, de part et d'autre d'un axe de suspension O perpendiculaire à la tige. Calculer, en fonction des masses M et m et des distances OA = A et Oa = a :

❶ La distance du centre de gravité du système au point O;

❷ Son moment d'inertie par rapport à O;

❸ La période de ses petites oscillations;

❹ Sa vitesse angulaire lors du passage par la verticale, l'élongation angulaire initiale du système abandonné sans vitesse initiale étant α;

$$M = 180 \text{ g} \qquad m = 20 \text{ g} \qquad A = 20 \text{ cm} \qquad a = 20 \text{ cm}$$

$$\alpha = \frac{1}{10} \text{ radian} \qquad g = 9{,}80 \text{ u. SI.}$$

❺ La variation relative de période du métronome pour une élévation de température égale à t, le coefficient de dilatation linéaire du métal qui le constitue étant $\lambda = 10^{-5}$. $t = 50^0$. *(Bac.)*

Contrôle n° 19. Un pendule homogène oscille en un même lieu et à la même température avec une période $T_0 = 2$ s dans le vide et une période T dans un gaz G. La densité du gaz par rapport à l'air est 0,518 et celle du pendule 1,675 par rapport à l'eau. On appellera r le rapport des masses volumiques du gaz G et de la substance du pendule. On remarquera que r est petit par rapport à un. La masse volumique de l'air est 1,3 g/litre.

❶ Si l'on attribue la différence des deux périodes à la seule poussée d'Archimède, montrer que $T \simeq T_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right)$. Calculer T.

❷ Le pendule et un pendule identique oscillent dans deux plans parallèles.

Démontrer que l'intervalle de temps qui sépare deux coïncidences consécutives est pratiquement inversement proportionnel à r. Les pendules oscillent l'un dans le vide, l'autre dans un gaz G. Calculer cet intervalle de temps relatif aux données numériques précédentes. (D'après Bac.)

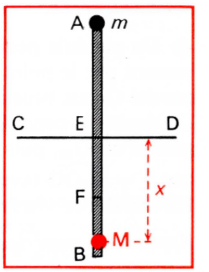
Contrôle n° 20.

A) Une barre AB tourne librement autour de CD. On néglige la masse de AB. AE = EB = 0,2 m. F est le milieu de EB. En A est fixée une masse m ponctuelle, m = 300 g. Une masse ponctuelle M = 600 g se déplace entre B et F. g = 9,8 m/s².

❶ Calculer en fonction de $x = EM$. La période T des petites oscillations du système.

❷ Comment varie T en fonction de x ?

❸ On met M en B, on écarte la barre AB de 9° par rapport à la verticale et on la laisse aller sans vitesse, quelle est la vitesse maximale de M en m/s ?

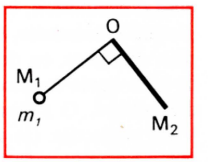


B) On bloque la barre CD en C et D, la rotation de AB provoque la torsion de la barre CD.

❶ La masse M est en F, la période des oscillations du système est T = 1,2 s. Calculer la constante de torsion de la barre CD.

❷ La masse M est en B. Quelle est la période des petites oscillations du système ?

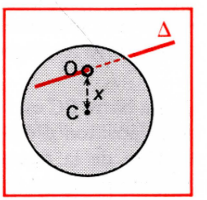
Contrôle n° 21. A l'extrémité d'une tige OM, de masse négligeable, de longueur 20 cm, est fixée une masse ponctuelle $m_1 = 200$ g. En O est soudée, à angle droit, une tige OM_2 homogène, de masse $m_2 = 300$ g, de longueur 20 cm. Quelle est la période des petites oscillations de ce système, suspendu en O ?



On donne : $g = 10$ m/s². (Moment d'inertie de $OM_2 = \frac{1}{3} m_2 . OM_2^2$.)

Contrôle n° 22. On étudie les petites oscillations d'un disque homogène de masse m, de rayon r, autour d'un axe horizontal Δ, dont on peut modifier la position de la trace O. $r = 20$ cm; $g = 10$ m/s².

❶ Représenter graphiquement la période T en fonction de $x = CO$.



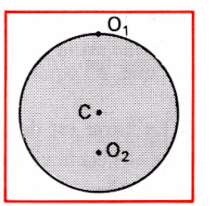
❷ Montrer, en utilisant la représentation graphique, que l'ensemble des positions de Δ autour desquelles le disque oscille avec une même période T est constitué par deux cylindres coaxiaux.

❸ Soit x_1 et x_2 les rayons de ces cylindres. Exprimer r en fonction de x_1 et x_2.

❹ Exprimer la longueur l du pendule simple synchrone en fonction de x_1 et x_2.

❺ Montrer que l'on peut choisir deux axes sur le disque, autour desquels le pendule oscille avec la même période T; la distance entre ces deux axes étant égale à la longueur du pendule simple synchrone; de tels axes sont dits réciproques. Expérimentalement comment peut-on vérifier que deux axes sont réciproques ?

Contrôle n° 23. Soit un disque homogène de rayon R pouvant osciller autour des deux axes O_1 et O_2 ($CO_1 = R$; $CO_2 = R/2$).



❶ Montrer que O_1 et O_2 sont deux axes réciproques et que le pendule simple synchrone a pour longueur $l = O_1O_2$.

❷ Sachant que R = 20 cm, que $g = 9{,}8$ m/s², quelle est la vitesse linéaire (en m/s) de O_2 lorsque, le pendule oscillant autour de O_1 avec une amplitude égale à 6°, O_2 passe par sa position d'équilibre ?

Contrôle n° 24.

❶ Un pendule pesant, de masse M, pivote sans frottement autour d'un axe fixe horizontal Δ, passant par le point O. Soit J le moment d'inertie du pendule par rapport à Δ. Son centre de gravité G_0 est situé à une distance a de O.
On écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle θ_m de façon à amener le centre de gravité en G_m, puis on le lâche, sans vitesse. Calculer sa vitesse angulaire θ' en un point G tel que $\theta = \widehat{G_0OG}$ (avec $\theta < \theta_m$), puis en G_0 lorsque le pendule repasse par sa position d'équilibre. En déduire la vitesse linéaire v_0 en G_0.

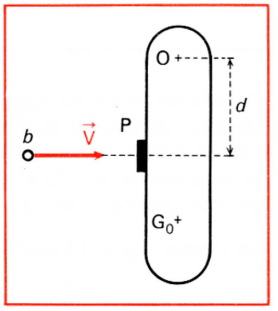
Application numérique : $M = 12$ kg; $g = 9{,}8$ m/s²; $a = 2{,}45$ m; $\theta_m = \frac{\pi}{3}$ rd; $J = 48$ kg.m².

❷ Le pendule, initialement à sa position d'équilibre, est lancé, avec une vitesse angulaire Ω. Jusqu'à quelle hauteur, h, au-dessus de G_0, G parvient-il?

Application numérique : $\Omega = 0{,}245$ rd/s.

❸ On lance horizontalement, avec une vitesse $\vec{v}$ parallèle au plan d'oscillation, une bille d'acier b, de masse m, en visant une plaque P aimantée, fixée sur ce pendule perpendiculairement au plan de figure, en dessous de O, la dénivellation est d. P retient la bille après le choc. L'ensemble s'écarte alors de la position d'équilibre. G s'élève de h à partir de G_0. Calculer la vitesse V du projectile. (m est négligeable devant M. On pourra considérer les moments cinétiques.)

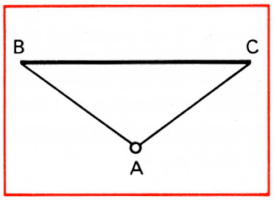
Application numérique : $m = 8$g; $d = 1$ m; $h = 1{,}22$ cm.



❹ Calculer numériquement la variation de l'énergie cinétique du système bille pendule au cours du choc. (*D'après Bac.*)

Contrôle n° 25. Une petite boule de fer, A, de masse $m = 0{,}010$ kg, est attachée par deux fils, AB et AC, inextensibles, de masse négligeable et de longueur $l = 1$ m, à deux points, B et C, d'une barre rectiligne ; on donne $BC = a = 1{,}60$ m.

❶ La barre BC est horizontale; on fait osciller la boule A autour de sa position d'équilibre dans un plan vertical perpendiculaire au plan de la figure, les fils étant tendus tous les deux et les oscillations ayant une faible amplitude. Calculer la période T_0.



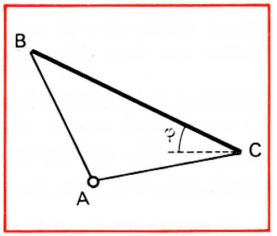
❷ On incline la barre BC de façon qu'elle fasse un angle φ avec l'horizontale et que les deux fils soient toujours tendus. On fait osciller A dans un plan perpendiculaire au plan de la figure de façon que les oscillations aient une faible amplitude.

a) Montrer que la période de ces petites oscillations est :

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{\cos \varphi}}$$

b) Calculer numériquement cette période pour $\varphi = 30°$.

c) Quelle est la plus grande valeur qu'on peut donner à φ si l'on veut que, à l'équilibre, les deux fils soient tendus?



❸ La barre est de nouveau horizontale (❶). On fait osciller A avec une amplitude de 0,1 rd.

a) Quelle est la vitesse linéaire de A au passage par sa position d'équilibre?

b) Quelle est la tension de chacun des fils au passage par cette position? (*D'après Bac.*)

Énergie potentielle
Énergie mécanique

Pb 23
Pb 24

Conseils généraux

L'énergie potentielle et l'énergie mécanique d'un système sont définis à une constante près. On pourra fixer arbitrairement leur valeur pour un état du système.
Bien revoir à quelles conditions l'énergie mécanique d'un système se conserve.

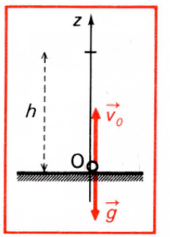
---

n° 90.

ÉNONCÉ

❶ Une bille d'acier de masse $m = 10$ g est lâchée sans vitesse d'une hauteur $h = 80$ cm au-dessus d'un plan d'acier sur lequel elle rebondit. Exprimer l'énergie potentielle E_p du système (bille, plan, Terre), son énergie cinétique E_c et son énergie mécanique E, en fonction du temps compté à partir du choc supposé parfaitement élastique. Conclure. $g = 10$ m/s².

CORRIGÉ



● *Calculons la vitesse de la bille juste avant le choc, la bille arrive alors sur le plan à la vitesse* $\vec{v}_1$ *acquise par* h *mètres de chute libre :*

$\frac{1}{2} mv_1^2 = mgh$ *d'où* $v_1 = \sqrt{2gh} = 4$ m/s.

● *A l'instant* $t = 0$ *a lieu le choc sur le plan. Le choc étant parfaitement élastique, la bille rebondit avec la vitesse* $\vec{v}_0 = -\vec{v}_1$.

Remarque : Ce résultat, que les élèves pourront écrire sans démonstration peut se déduire des lois des chocs parfaitement élastiques. L'énergie cinétique finale de la bille égale son énergie cinétique initiale, la somme des travaux des forces élastiques étant nulle. $\frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} mv_0^2 \Longrightarrow v_1 = v_0$ v_0 est la vitesse juste après le choc.

● *A l'instant* $t = 0$ *commence la remontée à la vitesse initiale* $\vec{v}_0$ *de module* $v_0 = 4$m/s. *Suivant l'axe* $\overrightarrow{oz}$ *la bille a un mouvement d'équation* $z = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 t$.

L'énergie potentielle de la bille en prenant $E_p = 0$ *pour* $z = 0$ *est* $E_p = mgz = -0{,}5\ t^2 + 0{,}4t$. *L'énergie cinétique* $E_c = \frac{1}{2} mv^2$, *en remarquant que* $v = -gt + v_0 = -10t + 4$, *est égale à :*

$$E_c = 5.10^{-3}(-10t + 4)^2 = 0{,}5\ t^2 - 0{,}4\ t + 0{,}08.$$

L'énergie mécanique $E = E_c + E_p = 0{,}08$ J, *elle est constante : en effet le système (bille, plan, Terre) est en transformation mécanique, d'autre part il est isolé (il ne subit aucune force extérieure).*

Remarque : Lorsque $z = 0$ $E = E_c = \frac{1}{2} mv_0^2$. Lorsque $v = 0$; $E = E_p = mgz$ d'où $z = \frac{0{,}08}{10^{-1}} = 0{,}8$ m $= h$: la bille remonte à sa position de départ, le choc parfaitement élastique n'a fait perdre aucune énergie mécanique.

ÉNONCÉ

❷ En fait à chaque choc sur le plan, une fraction $q = 20$ % de l'énergie mécanique se trouve perdue. La bille rebondit ainsi à plusieurs reprises restant sur la même trajectoire verticale. Exprimer l'énergie mécanique E_n après le n^e choc, en fonction de n.

Avant le premier choc $E_0 = mgh = 0{,}08$ J (1)
Après le premier choc $E_1 = E_0 (1 - q)$ (2)
Après le deuxième choc $E_2 = E_1 (1 - q)$
Après le n^e choc $E_n = E_{n-1} (1 - q)$ [n]

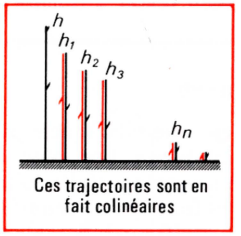
CORRIGÉ

Multiplions membre à membre (1) (2) ... [n], *et simplifions par* $E_1 ... E_{n-1}$

$$\Longrightarrow E_n = E_0 (1 - q)^n = 0{,}08\ (0{,}8)^n.$$

ÉNONCÉ

❸ Quelle distance aura, au total, parcourue la bille jusqu'à ce qu'elle s'immobilise? Quelle est la diminution totale de l'énergie mécanique?



Ces trajectoires sont en fait colinéaires

CORRIGÉ

● *Avant le premier choc* $E_0 = mgh$

Après le premier choc $E_1 = E_{c1} + E_{p1}$. *Quand* $E_{c1} = 0$ *la bille est à l'altitude maximale* h_1 *telle que* $E_1 = mgh_1$.

De même après le n^e choc la bille remonte à l'altitude maximale hz *telle que* $E_n = mgh_n$. *Comme* $E_n = E_0 (1 - q)^n$ *on en déduit* $hz = h(1 - q)^n$.

Soit d *la distance parcourue* $d = h + 2h_1 + ... 2hz + ...$

Ajoutons h *de chaque côté*

$$d + h = 2\ [h + h_1 + ... h_n + ...] = 2h\ [1 + (1 - q) + ... (1 - q)^n + ...]$$

L'expression entre crochets est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $1 - q = 0{,}8$; *de premier terme* 1; *comportant une infinité de termes. Cette somme est égale à* $\dfrac{1}{1 - (1 - q)} = \dfrac{1}{q}$.

Par suite $d + h = \dfrac{2h}{q} \Longrightarrow d = \dfrac{2h}{q} - h = 7{,}2$ m.

● *Calculons la diminution d'énergie mécanique. Au début* $E_0 = 0{,}08$ J. *A la fin la bille est immobile sur le plan donc* $E = 0$: *la diminution est donc de* 0,08 J.

ÉNONCÉ

❹ Au bout de quel temps t la bille s'immobilise-t-elle?

CORRIGÉ ABRÉGÉ

On trouvera $h = 5\ t_0^2 \Longrightarrow t_0^2 = \dfrac{h}{5}$, *de même* $t_n^2 = \dfrac{h_n}{5} = t_0^2 (1 - q)^n$.

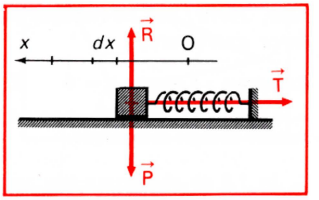
$$t = \left[t_0 + 2t_0\sqrt{1 - q} + ... + 2t_0\sqrt{1 - q}^{\,n} + ...\right] \Longrightarrow t = \frac{2t_0}{1 - \sqrt{1 - q}} - t_0 = 7{,}18 \text{ s}$$

---

n° 91.

ÉNONCÉ

❶ Un solide de masse m, glissant sans frottements sur un plan horizontal est maintenu par un ressort horizontal, de raideur k, de masse négligeable. Exprimer l'énergie potentielle du système (masse, ressort) en fonction de l'élongation x du solide comptée à partir de sa position d'équilibre.



CORRIGÉ

● *Nous savons que la diminution d'énergie potentielle est égale au travail des forces intérieures.*

La force intérieure est la tension $\vec{T}$ *du ressort.*

Au cours d'un déplacement élémentaire dx *le travail de* $\vec{T}$ *est* $dW = -T.dx$,

comme $T = kx \Longrightarrow dW = -kxdx$.

Lorsque x *varie de* 0 *à* x; $W = \int_0^x -kxdx = -\frac{1}{2}kx^2$

Par suite en appelant E_{p0} *l'énergie potentielle pour* $x = 0$, *et* E_p *l'énergie potentielle pour* x :

$$E_{p0} - E_p = -\frac{1}{2} kx^2, \textit{ si on convient de prendre } E_{p0} = 0$$

on en déduit $E_p = \frac{1}{2} kx^2$.

CORRIGÉ

Remarque : Si nous avions étudié le système (masse, ressort, plan, terre) $\vec{P}$ et $\vec{R}$ deviendraient alors des forces intérieures : $\vec{P}$ et $\vec{R}$ ne travaillant pas, l'énergie potentielle de ce système plus général est encore $1/2\ kx^2$.

ÉNONCÉ

❷ Que peut-on dire de l'énergie mécanique E du système, au cours d'oscillations de translation ? Donner une expression de E.

• *Le système est en transformation mécanique et isolé* ($\vec{P}$ *et* $\vec{R}$ *sont des forces extérieures qui s'annulent) par suite son énergie mécanique est constante. Pour évaluer l'énergie mécanique* $E = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2$, *il suffit de considérer une position extrême du ressort : dans ce cas* $v = 0$, $|x| = a$ *(amplitude), d'où* $E = \frac{1}{2} ka^2$.

• Démontrons le directement :

CORRIGÉ

Les oscillations sont sinusoïdales d'où $x = a \sin \omega t$ *(en prenant* $t = 0$ *pour un passage par* $x = 0$ *dans le sens positif), la vitesse* $\bar{v} = a\,\omega \cos \omega t$ *avec* $\omega = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\frac{k}{m}}$ (1)

Par suite $E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} ka^2 \sin^2 \omega t$ $\quad E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} ma^2\omega^2\cos^2\omega t$. *Remarquons que* $a^2\omega^2 = \frac{a^2k}{m}$ *(d'après* (1)*) d'où* $E_c = \frac{1}{2} ka^2\cos^2\omega t$.

Par suite $E = E_p + E_c = \frac{1}{2} ka^2 (\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) = \frac{1}{2} ka^2$. *L'énergie mécanique est proportionnelle au carré de l'amplitude.*

---

n° 92.

ÉNONCÉ

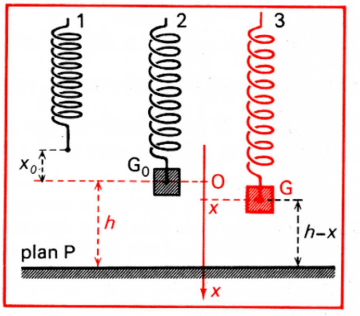
❶ Une masse *m* est suspendue à un ressort de raideur K. Donner une expression, la plus simple possible, de l'énergie potentielle du système S (masse, ressort, Terre).

• *A l'équilibre (position 2) le ressort a un allongement* x_0 *tel que* $mg = kx_0$ (1).

• *Le centre de gravité du solide* G *est repéré sur l'axe* ox, *l'origine de cet axe étant la position d'équilibre* G_0 *de* G.

• *Lorsque le solide a pour élongation* x, *le ressort est allongé de* $x_0 + x$ *et l'énergie potentielle élastique est* $E_{p,e} = \frac{1}{2} K(x_0 + x)^2$.

• *Repérons l'altitude de* G, *à partir d'un plan* P. *Soit* h *l'altitude de* G_0, *l'altitude du solide, lorsqu'il a l'élongation* x, *est* $h - x$, *l'énergie potentielle de pesanteur est donc* $E_{p,p} = mg(h - x)$.



CORRIGÉ

CORRIGÉ

● *Au total, l'énergie potentielle du système est* $E_p = \frac{1}{2}k(x_0 + x)^2 + mg(h - x)$, *c'est-à-dire* $E_p = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}kx^2 + kx_0x + mhg - mgx$, *en tenant compte de* (1).

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + \left(\frac{1}{2}kx_0^2 + mgh\right).$$

Si on convient de prendre $E_p = 0$ *pour* $x = 0$, *l'énergie potentielle du système est* $\frac{1}{2}kx^2$.

(Il suffit de choisir le plan P, *c'est-à-dire* h *tel que* $\frac{1}{2}kx_0^2 + mgh = 0$, *c'est-à-dire* $h = -\frac{x_0}{2}$ *(en tenant compte de* (1)*) : le plan* P *doit donc être à* $\frac{x_0}{2}$ *au-dessus de* G_0*).*

ÉNONCÉ

❷ La masse oscille verticalement. Que peut-on dire de l'énergie mécanique E du système? Donner une expression de E.

CORRIGÉ

● *L'énergie mécanique est constante : le système est en transformation mécanique, il est de plus isolé (ne pas oublier que le poids est une force intérieure au système).*

● *Pour évaluer l'énergie mécanique* $E = E_p + E_c = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$, *il suffit de considérer une position extrême du ressort : dans ce cas* $v = 0$ $|x| = a$ *(amplitude) d'où* $E = \frac{1}{2}ka^2$.

On retrouve encore que E *est proportionnelle au carré de l'amplitude.*
Remarque : On aurait pu démontrer directement que E *était constante et égale à* $1/2\ ka^2$ *(voir n° 91).*

---

n° 93.

ÉNONCÉ

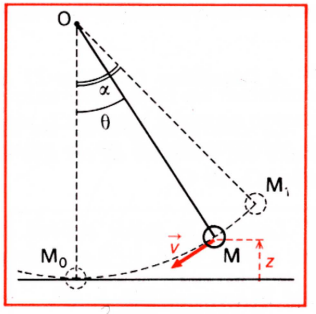
❶ Un pendule simple a pour longueur $\ell = 1$ m, pour masse $m = 100$ g. On l'écarte de $\alpha = 40^0$ de sa position d'équilibre stable et on le laisse aller sans vitesse. Que peut-on dire de l'énergie mécanique du système pendule-Terre? Evaluez-la; la position la plus basse de la masse M sera prise comme origine des altitudes z. $g = 10$ m/s².

CORRIGÉ

● *L'énergie mécanique du système pendule-Terre est constante : le système est en transformation mécanique et isolé (le poids de* M *est une force intérieure, les frottements sont négligeables). Donc tout au long du mouvement*

$$E = E_p + E_c \text{ est constante}$$

$E = mgz + \frac{1}{2}mv^2$, z *étant l'altitude par rapport à un plan horizontal passant par* M_0 *(convention de l'énoncé).*



● *Evaluons* E *en considérant un passage par* M_1 *: dans ce cas* $v = 0$, *d'autre part* $z = \ell - \ell \cos \alpha$, *d'où*

$$E = mg\ell(1 - \cos \alpha) \simeq 1 - 0{,}77 \simeq 0{,}23 \text{ Joule}$$

Remarque : On peut démontrer directement que E est constante : raisonnons sur une position d'élongation θ : $z = l - l \cos \theta$; d'autre part en appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre M_1 et M : $\frac{1}{2}mv^2 = mg(l \cos \theta - l \cos \alpha)$. Par suite $E = mgl\ (1 - \cos \theta) + mgl(\cos \theta - \cos \alpha) = mgl\ (1 - \cos \alpha)$.

ÉNONCÉ

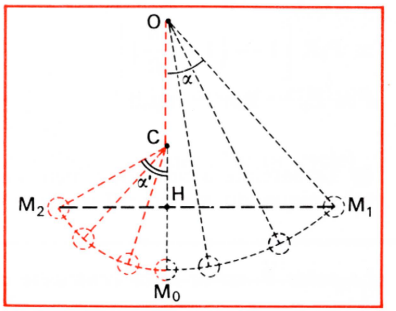
❷ En déduire l'énergie cinétique maximale du pendule.

CORRIGÉ

$E = E_p + E_c$ *étant constant,* E_c *est maximal lorsque* $E_p = 0$ *(passage par* M_0*), dans ce cas* $E = E_c = 0{,}23$ J.

ÉNONCÉ

❸ Le fil du pendule rencontre un clou C, situé à 50 cm au-dessous du point de suspension. De quel angle le pendule remonte-t-il de l'autre côté de C?



CONSEIL

Lorsque le fil rencontre C, les forces de contact ne travaillent pas, l'énergie mécanique ne varie pas.

Considérons les énergies du système pendule-Terre lors des passages en

M_1 *et* M_2 : $E_{P1} + E_{C1} = E_{P2} + E_{C2}$;

or $E_{C1} = E_{C2} = 0$; *donc* $E_{P1} = E_{P2}$. M_1 *et* M_2 *sont à la même altitude* z. *On voit sur la figure que :*

CORRIGÉ

$$\cos \alpha' = \frac{CH}{CM_2} = \frac{\ell \cos \alpha - \frac{\ell}{2}}{\frac{\ell}{2}} = 2 \cos \alpha - 1 = 0{,}53 \quad \alpha' = 58^\circ$$

---

n° 94.

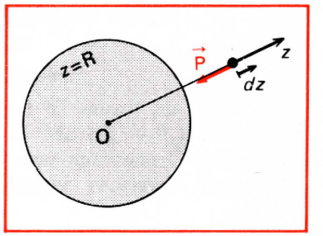
ÉNONCÉ

❶ Un satellite de masse *m* est situé à la distance *z* du centre de la Terre supposée sphérique de rayon R. Son poids est $P = \frac{P_0 R^2}{z^2}$, P_0 étant le poids à la surface de la Terre.

Donner l'expression de l'énergie potentielle E_p du système Terre-satellite en convenant que $E_p = 0$ à la surface de la Terre.

CORRIGÉ

● *Evaluons le travail effectué par le poids du satellite lorsque celui-ci passe du sol* (z = R) *à la distance* z *du centre de la Terre.*



$$\overline{W} = \int_R^z d\overline{W}$$

Evaluons $d\overline{W}$ *au cours d'un déplacement élémentaire* dz $d\overline{W} = -P\,dz$ *d'où*

$$W = \int_R^z -P dz = \int_R^z -\frac{P_0 R^2}{z^2}\,dz = -P_0 R^2 \int_R^z \frac{dz}{z^2} = -P_0 R^2 \left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{R}\right)$$

● *Ce travail de la force intérieure* $\vec{P}$ *est égal à la diminution d'énergie potentielle entre le sol* ($E_p = 0$ *d'après l'énoncé) et la distance* z.

$$0 - E_p = -P_0 R^2 \left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{R}\right) \text{ d'où } E_p = P_0 R^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{z}\right)$$

ÉNONCÉ

❷ Retrouver pour $z = R + h$, h étant petit devant R, l'énergie potentielle dans un champ de pesanteur uniforme.

CORRIGÉ

$$E_p = P_0R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = P_0R^2\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R\,(1+h/R)}\right] = P_0R\left[1 - \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-1}\right]$$

$$\simeq P_0R\left[1 - \left(1 - \frac{h}{R}\right)\right]$$

d'où $E_p = P_0h = mg_0h$.

ÉNONCÉ

❸ Le satellite a un mouvement de rotation circulaire et uniforme, quelle est l'énergie mécanique du système Terre-satellite ?

CORRIGÉ

Le poids $\vec{P}$ *est la force centripète du mouvement circulaire uniforme d'accélération centripète* $\vec{\gamma}$: $\vec{P} = m\vec{\gamma}$ *comme* $\gamma = \dfrac{v^2}{z} \Longrightarrow P = \dfrac{mv^2}{z}$.

L'énergie cinétique est $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{Pz}{m}\right) = \dfrac{Pz}{2} = \dfrac{P_0R^2}{2z}$.

L'énergie mécanique est donc $E = E_p + E_c = P_0R^2\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{z}\right) + \dfrac{P_0R^2}{2z}$.

C'est-à-dire $E = P_0R - \dfrac{P_0R^2}{2z}$.

Remarque : Lorsque le satellite part du sol $E_c = 0$ $E_p = 0$ d'où $E = 0$, il faut donc dépenser l'énergie mécanique E pour mettre le satellite en orbite.

Principe de l'état initial et final

Pb 25

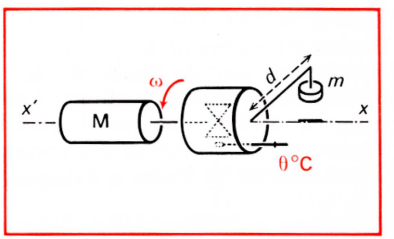
■ Conseils généraux

- $\overline{W}$ et $\overline{Q}$ sont > 0, s'ils sont reçus par le système.
- Si l'état final est différent de l'état initial (la transformation est alors ouverte) on envisagera deux transformations : $\overline{W}_1 + \overline{Q}_1 = \overline{W}_2 + \overline{Q}_2$.
- Si l'état final est identique à l'état initial (la transformation est fermée c'est un cycle) :

$$\overline{W} + \overline{Q} = 0.$$

ÉNONCÉ

n° 95. Un calorimètre de capacité thermique négligeable, contient M = 100 g d'eau, à la température θ °C. Il est mobile autour de son axe de révolution $x'x$. Un moteur M entraîne des palettes qui brassent l'eau du calorimètre. Celui-ci ne tourne pas : il est retenu par une masse $m = 114$ g, située à la distance $d = 50$ cm de $x'x$. La vitesse de rotation est constante : N = 120 tr/mn $\quad g = 9{,}8$ m/s².



❶ Lorsque θ est au voisinage de 15 °C, on note un accroissement de 1 °C par minute. Déterminer la valeur de J, équivalent mécanique de la calorie.

CORRIGÉ

- *Nous considérons le système : calorimètre, eau, palettes. Il est soumis au couple moteur* C *et à une force* $\vec{p}$ *égale au poids de* m. *Il reçoit un travail* W *effectué par* C. *En régime permanent le système palettes et eau a une répartition de vitesses constante : le moment cinétique du système ne varie donc pas, cela implique que la somme des moments d'impulsion est nulle :* $\Sigma \mathcal{M}\,\Delta t = 0$ *quel que soit* Δt *d'où* $\Sigma \mathcal{M} = 0 \Longrightarrow \mathcal{M} = \mathcal{M}_{\vec{p}} = mgd = 0{,}557$ m.N.

($\mathcal{M}$: *moment du couple* C).

- *Considérons deux états* 1 *et* 2 *du régime permanent séparés par une minute : Transformation* ❶ *le travail reçu* W *pendant cette minute est*

$$W = \mathcal{M}.\ \alpha = 0{,}557 \times 120.2\pi = 419 \text{ joules.}$$

Transformation ❷ *le même accroissement de température de* 1 °C *aurait pu être obtenu en chauffant. Il aurait fallu fournir la quantité de chaleur* $Q = Mc\ (\theta_2 - \theta_1)$, *d'après la définition de la calorie pour l'eau au voisinage de* 15 °C *la chaleur massique* C = 1 *cal/g/degré, par suite* $Q = 100 \times 1 \times 1 = 100$ *calories. Le système recevrait donc alors* $\overline{Q} = 100$ J. *joules.*
On peut donc passer de l'état 1 *à l'état* 2 *soit par la transformation* ❶ *réelle où le système reçoit* $\overline{W} = 419$ *joules et* $\overline{Q} = 0$ *soit par la transformation* ❷ *où le système recevrait* $\overline{Q} = 100.J$ *joules et* $\overline{W} = 0$.

- *D'après le principe de l'état initial et final* $\overline{W} + 0 = 0 + \overline{Q} \Longrightarrow 419 = 100.J$ *d'où* J = 4,19 *joules par calorie.*

ÉNONCÉ

❷ Au voisinage de 35 °C, le moteur tournant de la même façon, l'accroissement de température est de 1,003 °C par minute. En déduire la chaleur massique de l'eau à 35 °C en J/kg/°C.

De la même manière, on montre que :

CORRIGÉ

$\overline{W} = \overline{Q} \Longrightarrow \mathcal{M}\alpha = Mc\ (\theta_2 - \theta_1)$ (M *en kg*, c *en* J/kg/°C) *d'où*

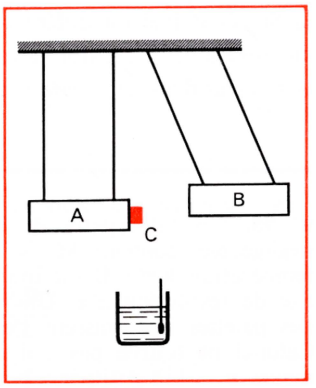
$$c = \frac{\mathcal{M}\alpha}{M \cdot (\theta_2 - \theta_1)} = \frac{419}{0{,}1(1{,}003)} = \frac{4190}{1 + 0{,}003} = 4190(1 - 0{,}003) \simeq 4180\ \text{J/kg/°C}.$$

---

n° 96.

ÉNONCÉ

❶ Sur un cylindre A, de masse M = 500 kg est maintenue une pastille de plomb C, de masse 1 kg. Un cylindre B identique à A, touche C lorsqu'il est à sa position d'équilibre. A et B sont suspendus par des fils parallèles. B est soulevé d'une hauteur h = 80 cm, puis abandonné sans vitesse; il frappe C qui tombe sous le choc dans un calorimètre situé immédiatement au-dessous. A s'élève de h' = 20 cm avant de redescendre, B rebondit, s'élève de h'' = 10 cm avant de redescendre. Initialement tout le dispositif était à 15 °C. A et B conservent cette température, l'eau du calorimètre passe à 15,6 °C lorsque l'équilibre thermique est atteint. Le calorimètre se comporte comme μ = 970 g d'eau. Evaluer en joules la valeur de la calorie.



La chaleur massique du plomb est c = 0,03 cal/g/ °C. g = 10 m/s².

On ne tiendra pas compte de la déformation du plomb.

CORRIGÉ

● *Considérons le système (bloc de plomb* C, *calorimètre). Dans la transformation ce système reçoit le travail* W *que nous allons évaluer. Ce travail est reçu par* C. *Le bloc* B *quand il arrive sur* C *possède l'énergie cinétique* Mgh *(égale au travail du poids). Après le choc,* B *possède encore l'énergie cinétique* Mgh″ *(susceptible d'élever* B *de* h″*) ;* A *possède l'énergie cinétique* Mgh′ *(susceptible d'élever* A *de* h′*). Par suite le bloc* C *reçoit l'énergie* W = Mgh — Mgh′ — Mgh″ = 2 500 J.

● *Pour produire la même élévation de température du système (bloc* C, *calorimètre), il aurait fallu fournir la quantité de chaleur*

$$Q = (mc + \mu)(\theta_2 - \theta_1) = (1\,000 \times 0\,03 + 970)(15.6 - 15) = 600\ \textit{cal},$$

c'est-à-dire Q = 600.J *joules, en posant* 1 *cal* = J *joules.*

● *D'après le principe de l'état initial et final* W + 0 = Q + 0, *d'où*

$$2\,500 = 600.J \text{ d'où } J = \frac{2\,500}{600} = 4{,}17 \text{ joules par calorie.}$$

ÉNONCÉ

❷ Une bille de plomb est lancée contre un mur de béton. A quelle vitesse v doit-elle arriver sur le mur pour qu'elle s'échauffe de 10 °C ?

CORRIGÉ

Le système reçoit l'énergie $W = \frac{1}{2}mv^2$. *Pour l'échauffer de la même manière il faudrait lui apporter la quantité de chaleur* $Q = mc\ (\theta_2 - \theta_1)$ *(en* u SI*).*

D'où $\frac{1}{2}mv^2 = mc(\theta_2 - \theta_1) \Longrightarrow v^2 = 2c(\theta_2 - \theta_1) = 2(0{,}03 \times 1\,000 \times 4{,}17) \cdot 10$

$= 2\,502 \Longrightarrow v = 50\ m/s.$

Théorème de Carnot

Pb 26

■ **Conseils généraux**

— Pour un moteur thermique le rendement $R = \frac{W}{Q_1}$, le rendement maximal $R_m = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ (indice 1 pour la source chaude, 2 pour la source froide). Les élèves de D se limiteront aux moteurs thermiques.

— Pour n'importe quelle machine thermique, dans les meilleures conditions $\frac{\overline{Q_1}}{T_1} + \frac{\overline{Q_2}}{T_2} = 0$.

---

n° 97. Dans tout ce problème, le rendement réel R d'une machine s'obtient à partir du rendement maximal R_m par $R = 0{,}9\ R_m$.

ÉNONCÉ

❶ La chaudière d'une machine à vapeur produit de la vapeur d'eau à 127 °C, après utilisation la vapeur est rejetée dans l'atmosphère. Quel est le rendement maximal de cette machine ?

CORRIGÉ

D'après le théorème de Carnot, pour un moteur thermique, $R_m = 1 - \frac{T_2}{T_1}$.

- T_1 *étant la température de la source chaude :* $T_1 = 127 + 273 = 400$ °K.
- *l'atmosphère se comporte comme un condenseur où la pression de vapeur d'eau saturante serait égale à 1 atmosphère, donc à la température de* 100 °C, *c'est-à-dire à*

$$T_2 = 100 + 273 = 373\ ^\circ K.$$

Le rendement maximal est donc $R_m = 1 - \frac{373}{400} = 0{,}0675.$

ÉNONCÉ

❷ La vapeur d'eau est surchauffé à 277 °C, on utilise un condenseur où l'on maintient une température de 27 °C. Evaluer le rendement maximal et le rendement réel de la machine.

CORRIGÉ

$T_1 = 277 + 273 = 550\ ^\circ K$ $\qquad$ $T_2 = 27 + 273 = 300\ ^\circ K.$

$R_m = \frac{250}{550} = 0{,}455$ $\qquad$ *d'où* $\qquad R = 0{,}9 \times 0{,}455 = 0{,}41.$

On remarquera que le rendement est très amélioré.

ÉNONCÉ

❸ La machine fonctionnant comme au ❷ a une puissance mécanique $\mathscr{P} = 10^3$ kW. Quelle masse de fuel consomme-t-elle par heure ? Quelle est la quantité de chaleur produite par la combustion du fuel ? Le pouvoir calorifique du fuel est 10^4 kcal/kg.

CORRIGÉ

- *Le travail fourni en une heure est* $W = \mathscr{P} \cdot t = 10^6 \cdot 3600 = 3{,}6 \cdot 10^9 J.$

D'après la définition du rendement d'un moteur : $R = \frac{W}{Q_1}$, Q_1 *étant la quantité de chaleur fournie par la combustion du fuel.*

- *Evaluons donc* Q_1. $\qquad Q_1 = \frac{W}{R} = \frac{3{,}6 \cdot 10^9}{0{,}41} = 8{,}75 \cdot 10^9$ J.

La combustion de 1 kg *de fuel dégage* 10^4 kcal $= 10^7$ cal $= 4{,}19 \cdot 10^7$ J, *d'où la masse de fuel consommée* $m = \frac{8{,}75 \cdot 10^9}{4{,}19 \cdot 10^7} = 208$ kg.

ÉNONCÉ

❹ La machine à vapeur fonctionnant comme au ❸ actionne une thermopompe qui prélève l'eau dans un lac à 17 °C et l'envoie à 77 °C dans des radiateurs. Quelle est la quantité de chaleur fournie pendant une heure par ce dispositif. Comparer avec celle qui résulterait de la combustion du fuel.

CORRIGÉ

● *La thermopompe reçoit du travail* $\overline{W} > 0\ \overline{W} = W = 3{,}6 \cdot 10^9 J$.

Elle fournit à la source chaude (les radiateurs à $T_1 = 350\ °K$*) de la chaleur :*

$$\overline{Q_1} < 0 \qquad \overline{Q_1} = -Q_1.$$

Elle reçoit de la chaleur de la source froide (à $T_2 = 290\ °K$*) :* $\overline{Q_2} > 0 \quad \overline{Q_2} = Q_2$.

Le fonctionnement étant cyclique $\overline{W} + \overline{Q_1} + \overline{Q_2} = 0 \Longrightarrow W - Q_1 + Q_2 = 0.$ (1)

Supposons le rendement maximal $\dfrac{\overline{Q_1}}{T_1} + \dfrac{\overline{Q_2}}{T_2} = 0 \Longrightarrow -\dfrac{Q_1}{T_1} + \dfrac{Q_2}{T_2} = 0.$ (2)

Eliminons Q_2 *entre* (1) *et* (2) :

$$Q_2 = Q_1 - W \Longrightarrow -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_1 - W}{T_2} = 0 \Longrightarrow Q_1\left(\frac{T_1 - T_2}{T_1}\right) = W \qquad (3)$$

Le rendement maximal R_m *est égal à* $R_m = \dfrac{Q_1}{W}$, *d'après* (3) $R_m = \dfrac{T_1}{T_1 - T_2}$.

Comme l'énoncé précise que le rendement réel $R = 0{,}9\ R_m \Longrightarrow \dfrac{Q_1}{W} = 0{,}9\ \dfrac{T_1}{T_1 - T_2}$.

On en déduit donc $Q_1 = 1{,}89 \cdot 10^{10} J$. *On a vu que pendant une heure la combustion du fuel dégage* $8{,}75 \cdot 10^9 J$, *l'emploi de la thermopompe double la production de chaleur.*

ÉNONCÉ

n° 98. Un groupe moteur-pompe, maintient dans une chambre froide une température t_2 °C. L'extérieur est la source chaude à $t_1 = 27$ °C. La puissance du moteur est 1 kW, il marche constamment. Les fuites à travers les parois sont données par $Q = k(t_1 - t_2)$ Q étant la quantité de chaleur échangée par seconde. On donne $k = 20$ J/°C/s. Evaluer t_2.

CORRIGÉ

● *Le système réfrigérant pendant* 1 *seconde reçoit du travail :* $\overline{W} > 0\ \overline{W} = W = \mathscr{P}.1$.

● *Pour maintenir la température* t_2 *constante, il faut prendre à la source froide une quantité de chaleur :* $\overline{Q_2} > 0 \Longrightarrow \overline{Q_2} = Q_2$, *cette quantité de chaleur prise à la source froide doit compenser la quantité chaleur reçue par la source froide à cause des fuites, d'où*

$$Q_2 = k(t_1 - t_2) = k(T_1 - T_2) \text{ (par seconde)}.$$

● *Le système réfrigérant cède de la chaleur à l'extérieur* $\overline{Q_1} < 0 \qquad \overline{Q_1} = -Q_1$

● *Le fonctionnement étant cyclique :* $\overline{W} + \overline{Q_1} + \overline{Q_2} = 0 \Longrightarrow W - Q_1 + Q_2 = 0.$ (1)

● *Supposons le rendement maximal* $\dfrac{\overline{Q_1}}{T_1} + \dfrac{\overline{Q_2}}{T_2} = 0 \qquad -\dfrac{Q_1}{T_1} + \dfrac{Q_2}{T_2} = 0.$ (2)

Eliminons Q_1 *entre* (1) *et* (2)

$$Q_1 = W + Q_2 \Longrightarrow -\left(\frac{W + Q_2}{T_1}\right) + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \Longrightarrow W = Q_2\left(\frac{T_1 - T_2}{T_2}\right).$$

Comme $Q_2 = k(T_1 - T_2) = 20\ (300 - T_2) \qquad W = 1\,000$ J, *on en déduit* $T_2^2 - 650\ T_2 + 9 \cdot 10^4 = 0 \Longrightarrow T_2 = 450\ °K$ *ou* $200\ °K$. *La première température supérieure à* $T_1 = 300\ °K$ *est à rejeter, donc* $T_2 = 200\ °K \Longrightarrow t_2 = -73\ °C$.

Contrôles — Pb 23 à Pb 26

Contrôle n° 1.

❶ Une masse de 600 g est suspendue à un point fixe par l'intermédiaire d'un fil de longueur $l = 2{,}00$ m. On prendra $g = 10$ m/s². Ce pendule sera assimilé à un pendule simple. On mesurera les altitudes h à partir de la position la plus basse. Lors des oscillations la masse monte au maximum à l'altitude $h = 20$ cm. Quelle est l'énergie mécanique du système pendule-Terre ? En déduire l'énergie cinétique et la vitesse maximale.

❷ En fait l'amplitude diminue, et après quatre oscillations l'altitude maximale n'est plus que $h = 17$ cm. Quelle est la puissance mécanique moyenne perdue pendant cet intervalle de temps ? On admettra qu'il y a isochronisme des oscillations.

❸ Ce pendule est accroché à un axe vertical qui tourne à une vitesse angulaire constante ω, la masse décrit alors une circonférence située 20 cm au-dessus de sa position au repos. Calculer ω et l'énergie mécanique du système pendule-Terre. Le moteur a lancé le système à cette vitesse en six tours, quel est le moment de son couple moteur supposé constant ?

Contrôle n° 2. On veut créer un satellite artificiel de la Terre en faisant tourner un corps à une altitude de 1 600 km autour de la Terre à une vitesse suffisante pour que la force centrifuge due au mouvement circulaire uniforme compense la pesanteur à cette altitude.
Le poids P d'un corps de masse M à l'altitude h est donné par la formule :

$$P = Mg = Mg_0\left(\frac{R}{R + h}\right)^2.$$

Dans cette formule, R représente le rayon de la Terre, qui sera pris égal à 6 400 km ; g_0 est l'accélération de la pesanteur au niveau de la mer et sera pris égal à 10 m/s² ; la masse M du satellite sera prise égale à une tonne.

❶ Calculer la vitesse linéaire que doit avoir ce satellite sur sa trajectoire, supposée circulaire, autour du centre de la Terre.

❷ Calculer la durée d'une rotation autour de la Terre.

❸ Calculer l'énergie cinétique du satellite.

❹ En supposant maintenant que l'accélération de la pesanteur est constante et égale à 8m/s² entre l'altitude zéro et l'altitude 1 600 km, calculer l'augmentation de l'énergie potentielle du satellite quand il part de la surface de la Terre pour atteindre l'atitude indiquée.

❺ Quelle énergie totale est-il nécessaire de dépenser pour mettre le satellite en orbite sachant que le travail des forces de frottement représente 20 % du travail du poids. *(D'après Bac.)*

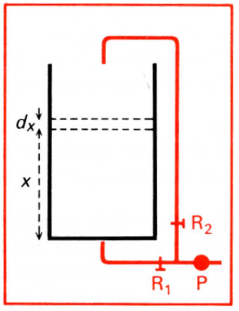
Contrôle n° 3. Une petite automobile de masse $m = 100$ g, est munie d'un ressort spiral qui peut en actionner le mécanisme. Le moment du couple exercé sur l'axe qu'il entraîne est donné par $\mathcal{M} = C\theta$, θ étant l'angle de rotation compté à partir d'une position de repos.

❶ Exprimer l'énergie potentielle du ressort, en fonction de θ. On veut emmagasiner 0,1 J. Combien de tours de clef faut-il donner à partir de $\theta = 0$? Déterminer l'intensité des forces $\vec{F}$ et $\vec{F'}$ exercée tangentiellement aux extrémités de la clef en fin de course. On suppose $F = F'$. On donne $C = 5.10^{-5}$ m.N/rd, la largeur de la clef est 1 cm. $\pi^2 = 10$.

❷ Le ressort ainsi remonté sert à faire monter la voiture sur une pente d'inclinaison α par rapport à l'horizontale telle que $\sin\alpha = 0{,}05$. Les résistances équivalent à une force de 0,05 N. Quelle distance parcourt-elle jusqu'à l'arrêt ? $g = 10$ m/s².

❸ Le ressort incomplétement détendu est remonté en 6 tours de clé. A la fin l'énergie emmagasinée est encore 0,1 J. Quelle énergie le ressort possédait-il encore en réserve ?

Contrôle n° 4. Un réservoir cylindrique de section S, de hauteur h peut être rempli d'eau à l'aide d'une pompe P, soit par le bas, soit par le haut. On néglige la vitesse de l'eau dans les tuyaux.



❶ R_1 est fermé, R_2 est ouvert. Quel travail doit fournir la pompe pour remplir le réservoir $g = 10$ m/s², S $= 2$ m², $h = 4$ m.

❷ Le réservoir plein, quelle énergie potentielle le réservoir possède-t-il en réserve ? Expliquez la différence entre le résultat du 1 et le résultat du 2.

❸ R_2 est fermé, R_1 est ouvert. Quel travail W doit fournir la pompe pour remplir le réservoir ? On cherchera le travail élémentaire dW pour élever à partir de x le niveau de dx. Puis on en déduira W lorsque x varie de 0 à h. Conclure.

Contrôle n° 5. Un pendule de torsion est constitué par un fil de torsion vertical OM : O étant lié à un point fixe, M étant fixé au milieu d'une barre horizontale, mobile, AB de longueur AB $= l = 60$ cm et de masse $m = 900$ g.

❶ Pour écarter, d'un mouvement très lent et à partir de la position d'équilibre, la barre d'un angle $\alpha = 0{,}5$ rd il faut fournir le travail W $= 0{,}6$ J. Quelle est la constante de torsion du fil ?

❷ Quelle énergie cinétique maximale la barre prend-elle si 'on la laisse aller sans vitesse, à partir de la position précédente à l'instant $t = 0$?

❸ Quelle est la pulsation des oscillations ? $J = \dfrac{ml^2}{12}$

❹ Exprimer en fonction du temps :
a) l'énergie cinétique de la barre E_c ;
b) l'énergie potentielle E_p (on prendra $E_p = 0$ pour la position d'équilibre) ;
c) l'énergie mécanique E.
Conclure.

Contrôle n° 6.

❶ Un corps de masse m est lancé de la surface du globe terrestre avec la vitesse $\vec{v}$ centrifuge, il s'éloigne indéfiniment. Montrer que v doit être supérieure à une valeur $v_0 = \sqrt{2\,g_0 R}$ appelée la vitesse de libération. R est le rayon terrestre, g_0 l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre. (On évaluera l'énergie potentielle du système Terre-objet (voir n° 94), on écrira la conservation de l'énergie mécanique lorsque le corps s'éloigne de la Terre à l'infini.)

❷ Déterminer la vitesse de libération de la surface de la Terre, puis de la Lune. On donne :

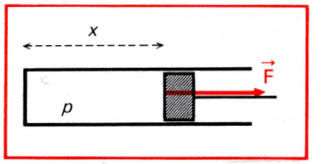
Terre $\begin{cases} g_0 = 10 \text{ m/s}^2 \\ R = 6\,400 \text{ km} \end{cases}$ Lune $\begin{cases} g'_0 = 1{,}7 \text{ m/s}^2 \\ R' = 1\,700 \text{ km} \end{cases}$

❸ Les molécules d'un gaz tel que l'air ont une vitesse d'agitation qui peut atteindre 5 000 m/s. Que peut-on en conclure quant à l'environnement gazeux de la Terre et de la Lune ?

Contrôle n° 7. (Après étude du logarithme népérien).
Le corps d'une pompe à bicyclette, de longueur 30 cm, de section 10 cm², est entièrement rempli d'air sous la pression $p_0 = 10^5$ Pa. On enfonce le piston. On désigne par x sa distance à l'extrémité bouchée du corps de pompe. On supposera la température invariable.

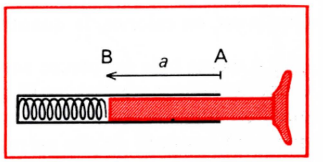
❶ Exprimer F, intensité de la force pressante exercée sur le piston, en fonction de x.

❷ Montrer, qu'en prenant $E_p = 0$ pour $x = 0{,}3$ m c'est-à-dire quand l'air est à la pression extérieure, l'énergie potentielle de l'air enfermé a pour expression $E_p = 30 \operatorname{Log} \frac{0{,}3}{x}$.



❸ Le piston n'est pas enfoncé, la pompe est remplie d'air sous la pression p_0, en déduire quel travail il faut dépenser pour enfoncer le piston de 10 cm.

Contrôle n° 8.



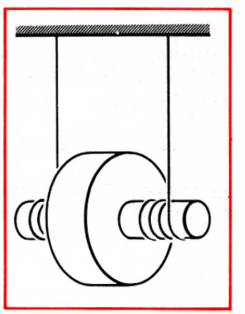
❶ Le ressort d'un pistolet à flèche, au repos, à son extrémité libre en A. Le canon est horizontal. On enfonce lentement une flèche : l'extrémité du ressort passe de A à B tel que $AB = a = 10$ cm. Le ressort a pour raideur $k = 100$ N/m. Quel est le travail nécessaire ?

❷ La masse de la flèche est $m = 10$ g, on laisse le ressort se détendre. Arrivée en A, la flèche se sépare du ressort. On admettra que le ressort a une masse négligeable et n'accumule donc pas d'énergie cinétique.
a) Evaluer l'énergie mécanique du système ressort-flèche au cours de la détente. En déduire à quelle vitesse la flèche part de A.
b) Montrer que la durée pour aller de B à A correspond à un quart de période d'oscillation du système ressort-flèche. Calculer cette durée.

❸ La flèche se colle en C sur une cible verticale située à 2,5 m de A. Quelle est la dénivellation entre C et l'horizontale AB ? Quelle est l'énergie cinétique de la flèche en C ? $g = 10$ m/s². On néglige, dans tout le problème, les frottements.

Contrôle n° 9. Un volant cylindrique homogène, de masse $m = 100$ g, de rayon $R = 10$ cm, muni d'un axe, de masse négligeable, de rayon $r = 1$ cm, est suspendu à deux fils verticaux, partiellement enroulés autour de l'axe $g. = 10$ m/s².

❶ Le volant est abandonné sans vitesse, soit $\vec{v}$ la vitesse de son centre de gravité G au cours de la chute. Exprimer l'énergie cinétique en fonction de v.



❷ On repérera G par son abscisse x comptée à partir de sa position de départ. La position la plus basse de G est repérée par $x = 50$ cm. On prendra l'énergie potentielle du système volant-Terre égale à 0 pour $x = 50$ cm. Donner l'expression de l'énergie mécanique du système volant-Terre. En déduire la vitesse de rotation du volant pour $x = 50$ cm. On néglige les frottements.

❸ Quelle est la nature du mouvement de G ? Evaluer son accélération.

❹ Quelle est la tension de chaque fil ?

Contrôle n° 10. Une brique de masse $m = 3$ kg, descend le long d'un plan incliné de pente $\sin\alpha = 0{,}2$, de longueur 60 cm, avec une vitesse constante. Quelle est la quantité de chaleur dissipée par les frottements ? $g = 10$ m/s².

Contrôle n° 11. La température dans la chaudière qui alimente une turbine à vapeur est 200 °C. la vapeur est après utilisation, envoyée dans un condenseur à 40 °C.

❶ Quel est le rendement maximal de ce moteur thermique?

❷ Le rendement réel est les 8/10 du rendement maximal. La puissance mécanique égale 10 kW. Le combustible utilisé produit 10^4 kcal par kilogramme. Quelle est la consommation du combustible pendant une minute.

Contrôle n° 12. Une bille d'acier pesant 500 g tombe, sans vitesse initiale, d'une hauteur inconnue.

❶ Quelle est cette hauteur, sachant que la résistance de l'air est négligeable et qu'en fin de chute, la vitesse de la bille, est égale à 14 m/s? $g = 9{,}8$ m/s^2.

❷ A la fin de sa chute, la bille heurte un plan indéformable et rebondit à une hauteur de 1 m. Quelle est, en calories, la quantité de chaleur dégagée au moment du choc?

❸ La même bille est percée suivant un de ses diamètres d'un petit canal dans lequel est engagé un fil métallique vertical; ce fil guide la bille pendant sa chute, et exerce sur elle un frottement que l'on suppose constant. Quand on laisse tomber la bille de la même hauteur que précédemment, on constate qu'elle ne rebondit pas. La chute a duré 2 secondes. En déduire la force de frottement et la quantité de chaleur (en calories) dégagée au moment du choc. *(D'après Bac.)*

Contrôle n° 13.

❶ On a mis dans un cylindre fermé par un piston de masse négligeable, 2 g d'eau liquide à 100 °C. On chauffe afin de vaporiser l'eau. Le piston est refoulé, on obtient 3 l de vapeur d'eau à 100 °C, Evaluer le travail $\overline{W}$ et la quantité de chaleur $\overline{Q}$ reçus par l'eau.
La chaleur latente de vaporisation de l'eau est L = 540 cal/g, la pression atmosphérique est $p_{at} = 10^5$ Pa.

❷ On injecte 2 g d'eau liquide à 100 °C dans un récipient vide de 3 l; cela ne demande aucun travail. Par suite de la détente la température s'abaisse. On chauffe pour la ramener à 100 °C et pour vaporiser toute l'eau. Quelle quantité de chaleur $\overline{Q'}$ a-t-il fallu fournir à l'eau?

Contrôle n° 14. Un moteur à explosion développe une puissance de 80 ch, il consomme à ce régime 16 l de carburant à l'heure. La densité du carburant est 0,7 et son pouvoir calorifique 11 000 kcal/kg. 1 ch = 735 W.

❶ Quel est le rendement de ce moteur?

❷ On admet que le moteur évolue entre le température 2 000 °C de la source chaude et la température 700 °C de la source froide. Calculer le rendement maximum. Conclure.

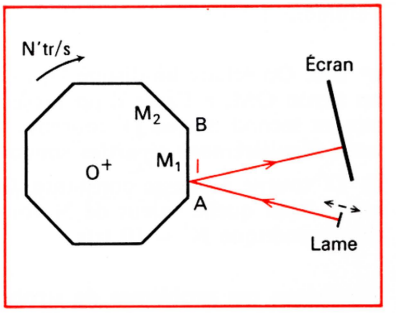
Étude d'un mouvement vibratoire

n° 99.

ÉNONCÉ

❶ Un miroir tournant, de base octogonale, comprend 8 faces réfléchissantes, égales. Il est utilisé pour étudier le mouvement sinusoïdal de fréquence N = 100 Hz d'une lame vibrante. Quelles valeurs doit prendre sa vitesse de rotation N′ si l'on veut observer une courbe fixe sur l'écran ?

CORRIGÉ



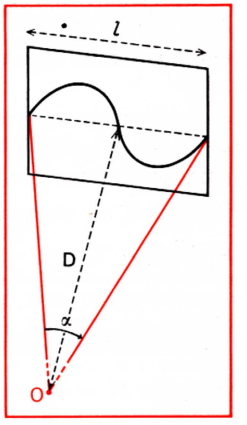
Quand le point d'incidence I *sur* M_1 *passe de* A *à* B *(le miroir tournant de* 1/8 *de tour) le spot décrit sur l'écran une courbe* C. *Si pendant ce temps* $t = \frac{T'}{8}$ (T′ *période du miroir) la lame a accompli un nombre entier d'oscillations* k, *le miroir* M_2 *reprendra le rayon incident exactement dans les mêmes conditions que* M_1, t *secondes avant. Soit* T *la période de la lame, il faut donc pour que les diverses courbes se superposent exactement que* $\frac{T'}{8} = kT$ k *entier positif,*

d'où $N' = \frac{N}{8k} = \frac{12{,}5}{k}$ tr/s.

ÉNONCÉ

❷ L'écran, de largeur $\ell = 20$ cm, est à D = 2 m de l'axe de rotation du miroir. Le pinceau lumineux réfléchi passe pratiquement par cet axe. Quelle doit être la vitesse de rotation du miroir si l'on veut voir approximativement une seule sinusoïté fixe sur l'écran ?

CORRIGÉ



- *Pour que la sinusoïté soit fixe il faut d'abord que* $N' = \frac{12{,}5}{k}$ (1)
- *Pour qu'il n'y ait qu'une seule sinusoïté il faut qu'en une période* T *le pinceau réfléchi décrive tout l'écran, il doit donc tourner d'un angle* α *tel que* $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\ell}{2D} \Longrightarrow \alpha \simeq \frac{\ell}{D} = 0{,}1$ rd.

Nous savons que le miroir tourne de l'angle moitié, c'est-à-dire de 0,05 rd, *c'est-à-dire de* $\frac{0{,}05}{2\pi}$ tr.

La vitesse du miroir N′ *(en* tr/s) *doit donc être égale à*

$$N' = \frac{0{,}05}{2\pi T} = \frac{5}{2\pi} = 0{,}79 \text{ tr/s.}$$

- *Voyons si la condition* (1) *est à peu près satisfaite :*

$$k = \frac{12{,}5}{N'} = \frac{12{,}5}{5/2\pi} = 5\pi = 15{,}7.$$

Pour avoir une bonne stabilité k *doit être entier. On pourra répondre à la question en stabilisant la courbe sur l'écran en prenant* k = 16, *c'est-à-dire* $N' = \frac{12{,}5}{16} \simeq 0{,}78$ tr/s.

De ce fait la courbe observée ne correspondra pas exactement à une sinusoïté.

ÉNONCÉ

❸ La persistance de l'image rétinienne dure 1/20 s. Qu'observe-t-on sur l'écran dans les conditions de la 2e question.

CORRIGÉ

● *La sinusoïté que dessine le spot sur l'écran est décrite en un temps* $T = 10^{-2}$ s, *qui est donc inférieur à* 1/20 s : *elle paraît donc uniformément éclairée.*

● *La sinusoïté suivante a lieu lorsque le miroir a fait* $\frac{1}{8}$ *de tour, c'est-à-dire après* $\frac{1}{8 \times 0{,}78} = 0{,}16$ s *(le miroir faisant* 0,78 tr/s*). Cette durée est supérieure à* 1/20 s, *l'éclairage paraît donc intermittent.*

ÉNONCÉ

n° 100. On éclaire un disque D, tournant à la vitesse de N tr/s, sur lequel on a marqué un rayon OM, à l'aide d'un projecteur dont le faisceau est intercepté (ou démasqué) par un second disque D′ tournant à la vitesse de N′ tr/s et comportant $p = 3$ ouvertures régulièrement réparties sur sa périphérie.

❶ D′ tourne à vitesse constante. On met D en mouvement, N augmente progressivement. Pour quelle valeur de N voit-on pour la première fois OM immobile ? Application numérique $N' = 10$ tr/s.

CONSEIL

Dans tous ces problèmes de stroboscopie, il est intéressant de considérer ce que fait le dispositif stroboscopé dans l'intervalle de temps qui sépare deux éclairs successifs.

CORRIGÉ

● *Lorsque* D′ *accomplit un tour, il démasque le faisceau* p *fois. Il y a donc* $N_e = N'p$ *éclairs par seconde. Entre deux éclairs il s'écoule* $T_e = \frac{1}{N_e} = \frac{1}{30}$ s.

● D *fait un tour pendant* $T = \frac{1}{N}$ *secondes.*

● OM *paraît immobile lorsque, pendant* T_e *secondes il accomplit un nombre entier,* k, *de tours d'où* $T_e = kT \Longrightarrow N = kN_e$ $(k = 1, 2, ...)$

● *L'immobilité apparente se manifeste la première fois pour* $k = 1$ *c'est-à-dire*

$$N = N_e = 30 \text{ tr/s.}$$

ÉNONCÉ

❷ Montrer qu'avant la première immobilité apparente, on peut voir quatre rayons immobiles. Pour quelles valeurs de N ?

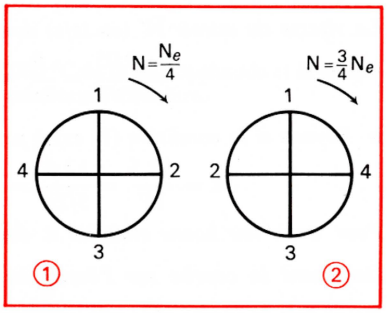
CORRIGÉ

● *Lorsque* $T_e = \frac{T}{4}$, *le rayon* OM *est surpris successivement aux positions* 1, 2, 3, 4, 1,... *(figure 1), compte tenu de la persistance des impressions rétiniennes, on les voit simultanément.*

Par suite $N = \frac{N_e}{4} = 7{,}5$ tr/s.

● *Lorsque* $T_e = \frac{3}{4}T$, OM *est surpris successivement aux positions* 1, 2, 3, 4, 1,... *(figure 2).*

Par suite $N = \frac{3}{4}N_e = 22{,}5$ tr/s.



n° 101. Un stroboscope électronique produit des éclairs, dont la fréquence N_e est connue à 1 Hz près.

ÉNONCÉ

❶ Il éclaire une lame vibrante. La valeur maximale de N_e, pour laquelle on observe la lame immobile est $N_e = 120$ Hz. Quelle est la fréquence N du mouvement de la lame ?

CORRIGÉ

On retrouverait comme dans l'exercice précédent la condition d'immobilité apparente. $T_e = kT \Longrightarrow N = kN_e \Longrightarrow N_e = \frac{N}{k}$, *$N_e$ est maximal lorsque* k *est minimal et égal à* $1 \Longrightarrow N = N_e = 120$ Hz. $\Delta N = \Delta N_e$, *par suite* $N = 120 \pm 1$ Hz.

ÉNONCÉ

❷ La fréquence des éclairs est ~~amenée~~, progressivement, de 0 à 1 000 Hz. La persistance des impressions lumineuses dure 1/20 s. Combien de fois se manifeste l'immobilité apparente ?

CORRIGÉ

- *Il y a immobilité apparente lorsque :* $N_e = \frac{N}{k} \Longrightarrow k = \frac{N}{N_e} = \frac{120}{N_e}$.
- *Pour que la lame paraisse constamment éclairée, il faut que* $T_e \leqslant \frac{1}{20}$ s $\Longrightarrow N_e \geqslant 20$ Hz.
- *Par suite* $20 \leqslant N_e \leqslant 1\,000 \Longrightarrow 0{,}12 < k \leqslant 6$, *donc* $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

L'immobilité apparente est perçue six fois.

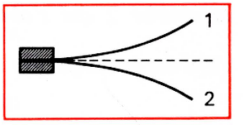
ÉNONCÉ

❸ Quel est l'aspect de la lame lorsque $N_e = 240$ Hz ?

CORRIGÉ

Comparons les deux périodes $T_e = \frac{1}{240}$ s $\quad T = \frac{1}{120}$ s, *d'où* $T_e = \frac{1}{2}T$.

Pendant l'intervalle de temps qui sépare deux éclairs successifs la lame accomplit une demi-oscillation, elle est surprise aux positions 1, 2, 1,... *On voit donc deux lames apparemment immobiles. (Lorsque les positions* 1 *et* 2 *sont confondues sur la position d'équilibre on ne voit plus qu'une lame.)*



ÉNONCÉ

❹ N_e est de nouveau égal à 120 Hz. On modifie le réglage de l'entretien du mouvement de la lame, sa fréquence N augmente légèrement. Elle paraît aller d'une position extrême à l'autre en 5 s. De combien a varié la fréquence N ?

CORRIGÉ

La période du mouvement apparent est $T_a = 2 \times 5 = 10$ s, *par suite la fréquence apparente* $N_a = 0{,}1$ Hz. *Comme* N *est voisin de* N_e, *la fréquence apparente est égale à*

$$N_a = N - N_e \Longrightarrow N = N_e + N_a.$$

Comme la fréquence N *était primitivement égale à* N_e, *l'accroissement de fréquence est* N_a *c'est-à-dire* 0,1 Hz.

---

n° 102. Toutes les fonctions considérées, dans ce problème, sont sinusoïdales, de même amplitude, de même fréquence.

ÉNONCÉ

$x_1 = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$.

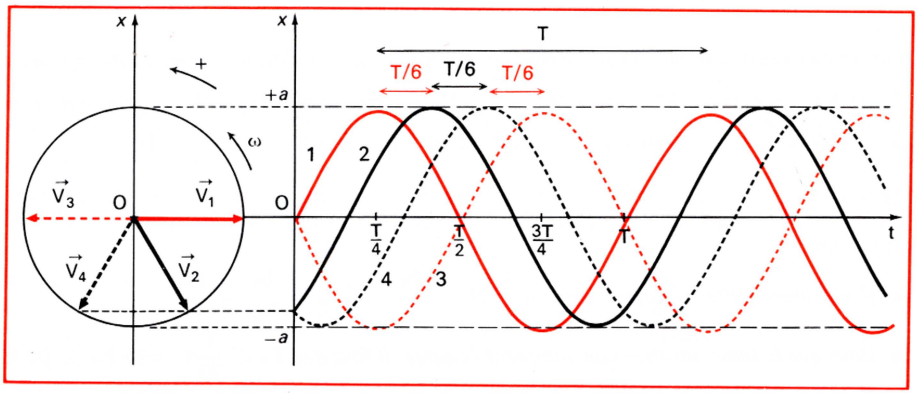
x_2, en retard par rapport à x_1 de $\frac{d}{\lambda}$ tour $\left(\text{on prendra } d = \frac{\lambda}{6}\right)$.

$x_3 = -x_1$.

x_4, en avance sur x_3 de $\frac{d}{\lambda}$ tour $\left(d = \frac{\lambda}{6}\right)$.

ÉNONCÉ

Dessiner les vecteurs de Fresnel $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$, $\vec{V_3}$, $\vec{V_4}$ de x_1, x_2, x_3, x_4. Donner les expressions de x_2, x_3, x_4. Construire les graphes représentant x_1, x_2, x_3, x_4 en fonction du temps (dans un même système d'axes).



CORRIGÉ

● x_1 *est représenté par le vecteur* $\vec{V_1}$ *et par la courbe* 1 *d'amplitude* a *de période* T.

● x_2 *est en retard de* $\frac{d}{\lambda}$tr, *c'est-à-dire que* $(\vec{V_1}, \vec{V_2}) = -\frac{2\pi d}{\lambda}\text{rd} = -\frac{2\pi}{6}\text{rd} = -60^\circ$; x_2 *a donc pour équation* $x_2 = a \sin\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{d}{\lambda}\right) = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda}\right)$. x_2 *est représenté par la courbe* 2 *qui s'obtient en translatant la courbe* 1 *de* $\frac{T}{6}$ *dans le sens des* t *croissants* (T/6 *est le temps que met* $\vec{V_2}$ *pour faire* 1/6 *de tour*).

● $x_3 = -x_1 = -a \sin 2\pi\frac{t}{T} = a \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \pi\right) \Longrightarrow \vec{V_3} = -\vec{V_1}$. *La courbe* 3 *est en opposition de phase avec la courbe* 1.

● x_4 *est en avance de* $\frac{d}{\lambda}\text{tr} = \frac{1}{6}\text{tr sur } x_3 \Longrightarrow (\vec{V_3}, \vec{V_4}) = \frac{2\pi d}{\lambda} = \frac{2\pi}{6}\text{rd}$.

Comme $x_3 = a \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \pi\right) \Longrightarrow x_4 = a \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \pi + \frac{2\pi d}{\lambda}\right) = -a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{d}{\lambda}\right)$.

La courbe 4 *s'obtient en translatant la courbe* 3 *de* $\frac{T}{6}$ *dans le sens des* t *décroissants.*

Remarque : Il s'ensuit que x_2 est en avance de 60° sur x_4, par suite la courbe 2 s'obtient en translatant la courbe 4 de T/6 dans le sens des *t* décroissants.

Propagations (ébranlements, vibrations)

■ Conseils généraux

● Quand on a une fonction sinusoïdale, pour déterminer l'amplitude, la phase initiale, il est intéressant de la ramener à la forme $y = a \sin(\omega t + \varphi)$ avec $a > 0$ a est alors l'amplitude, φ la phase initiale. Ainsi $y = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ a pour phase initiale $-\frac{2\pi x}{\lambda}$ $\left(\text{(et non pas } -\frac{x}{\lambda}\right)$ pour pulsation $\frac{2\pi}{T}$, pour période T.

● On pourra ramener la phase initiale à l'intervalle $\{-2\pi, 2\pi\}$.

---

n° 103. A l'extrémité d'une lame vibrant verticalement, est fixé un fil de longueur $\ell = 2$ m, de masse $m = 20$ g soumis à une tension F = 4 N. On admettra qu'il n'y a pas de réflexions aux extrémités du fil. La fréquence du mouvement de la lame est N = 100 Hz.

ÉNONCÉ

❶ Quelle est la longueur d'onde de la vibration ?

CORRIGÉ

● *Evaluons la masse linéaire (ou linéique)* $\mu = \frac{m}{\ell} = 10^{-2}$ kg/m

D'où la célérité des ébranlements transversaux : $V = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = 20$ m/s.

● *La longueur d'onde* $\lambda = VT = \frac{V}{N}$ *est égale à* $\lambda = \frac{20}{100} = 0{,}2$ m.

ÉNONCÉ

❷ L'extrémité S de la lame a un mouvement sinusoïdal d'amplitude $a = 2$ mm. Ecrire l'équation horaire du mouvement de S, ainsi que celle du point M du fil situé à la distance $SM = x = 65$ cm. On négligera l'amortissement, on indiquera comment sont choisis l'origine des temps et le repère.

CORRIGÉ

● *L'élongation* y_S *de la source* S *est comptée à partir de la position d'équilibre* S_0, *positivement vers le haut. A l'instant* $t = 0$ *supposons que* S *passe par* S_0 *dans le sens positif. L'équation horaire de* S *est alors*

$$y_S = a \sin 2\pi \frac{t}{T} = 2.10^{-3} \sin 200\ \pi t.$$

● M *est atteint par la vibration* x *mètres après* S *d'où*

$$y_M = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad . \quad \frac{x}{\lambda} = \frac{0{,}65}{0{,}2} = 3{,}25, \quad \textit{d'où}$$

$y_M = 2.10^{-3} \sin(200\ \pi t - 6{,}5\ \pi)$, *en ajoutant* $(3 \times 2\pi)$ *à la phase initiale ce qui ne change pas* y_M

$y_M = 2.10^{-3} \sin(200\ \pi t - 0{,}5\ \pi)$:

M *est en quadrature retard par rapport à* S : $y_M = -2.10^{-3} \cos 200\ \pi t$

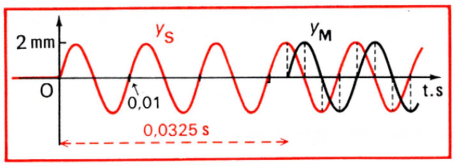
ÉNONCÉ

❸ Le mouvement de S commence à l'instant $t = 0$, S partant dans le sens positif. Dessiner dans un même système d'axes, les diagrammes des mouvements de S et de M. Echelle 10 cm/0,05 s, 0,5 cm/1 mm.

CORRIGÉ

● *La vibration met* $\mathscr{T}$ *secondes pour aller de* S *à* M.

$$\mathscr{T} = \frac{x}{V} = \frac{0{,}65}{20} = 0{,}0325 \text{ s.}$$



Le mouvement de M *commence donc à l'instant* t = 0,0325 s.
Remarquons que cela représente 3,25 *périodes.*
La courbe noire (représentant y_M*) est en quadrature retard sur la courbe rouge (représentant* y_S*)*

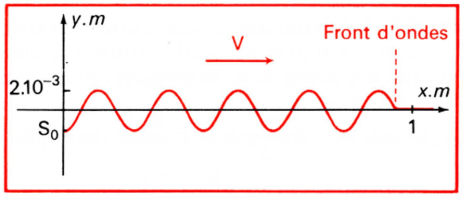
ÉNONCÉ

❹ Quel est l'aspect du fil à l'instant $t = 0{,}0475$ s? Les conditions initiales étant les mêmes qu'à la question ❸. Echelle $\begin{cases} \text{horizontalement } 10 \text{ cm/1 m} \\ \text{verticalement } 2 \text{ mm/1 mm} \end{cases}$

CONSEIL

Déterminer la position du front d'onde c'est-à-dire le point où le train d'ondes attaque la partie de la corde encore immobile.

● *A partir de l'instant* t = 0 *la vibration part de la source et se propage; à l'instant* t = 0,0475 s *la vibration est à* Vt = 20 × 0,0475 = 0,95 m *de la source. Le front d'onde est donc à cet instant à* 0,95 *m de la source.*



● *L'élongation de chaque point de corde (atteint par la vibration) à l'instant* t *est donnée par*

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\frac{t}{T} = \frac{0{,}0475}{0{,}01} = 4{,}75 \text{ d'où}$$

CORRIGÉ

$y = 2.10^{-3} \sin\left(-\frac{2\pi x}{0{,}2} + 9{,}5\pi\right)$, *supprimons* $(4 \times 2\pi)$ *à la phase initiale :*

$y = 2.10^{-3} \sin\left(-\frac{2\pi x}{0{,}2} + 1{,}5\pi\right)$ *cette expression peut aussi s'écrire*

$$y = 2.10^{-3} \sin\left(-\frac{2\pi x}{0{,}2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

en retranchant 2π *à la phase, c'est-à-dire*

$$y = -2.10^{-3} \sin\left(\frac{2\pi x}{0{,}2} + \frac{\pi}{2}\right) = -2.10^{-3} \cos 2\pi \frac{x}{0{,}2}$$

La courbe représentative de cette fonction dans le système d'axes S_0x *(porté par la corde à l'équilibre),* S_0y *donne la forme de la corde à l'instant* t : *c'est une sinusoïde pour*

$x \in [0; 0{,}95 \text{ m}]$, *une droite pour* $x \in [0{,}95 \text{ m}; 2 \text{ m}]$

ÉNONCÉ

❺ Quand on tend la corde avec une force $F' = 16$ N, on constate qu'elle s'allonge uniformément de $\frac{2}{100}$ en valeur relative. Quelle est la nouvelle longueur d'onde?

CORRIGÉ

● *Si la masse linéaire ne variait pas* $\lambda' = \frac{V'}{N} = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{F'}{\mu}} = 0{,}4$ m

● *En fait* μ *varie puisque* ℓ *varie de* $\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{2}{100}$.

Comme $\mu = \frac{m}{\ell} \Longrightarrow \frac{\Delta\mu}{\mu} = -\frac{\Delta\ell}{\ell} = -\frac{2}{100}$

d'où $\frac{\Delta\lambda'}{\lambda'} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{1}{100} \Longrightarrow \Delta\lambda' = \frac{0{,}4}{100} = 0{,}004.$

Par suite la longueur d'onde est en fait 0,4 + 0,004 = 0,404 m

n° 104. Un ressort spiral est tendu verticalement, deux spires consécutives sont distantes de 5 mm. La première spire, à partir du haut est soudée à l'extrémité S d'une lame vibrante, horizontale. L'équation horaire de son mouvement est $y = a \sin \omega t$: $a = 1$ mm, $\omega = 200\pi$ rd/s. On ne tiendra pas compte des réflexions sur les extrémités du ressort. Il n'y a pas d'amortissement.

ÉNONCÉ

❶ On stroboscope le ressort, la fréquence des éclairs N_e est voisine de 100 Hz. On constate que la 6e spire vibre en opposition de phase par rapport à la lame. Il n'y en a pas d'autre avant. Quelle est la vitesse de propagation des ondes ?

CORRIGÉ

● *La fréquence des éclairs* N_e *étant voisine de la fréquence de la lame* N, *on observe les spires en mouvement apparent ralenti.*

● *La* 1re *et la* 6e *spire étant en opposition de phase, elles sont séparées d'une demi-longueur d'onde. Entre la* 1re *et* 6e *spire, il y a* 5 *intervalles de* 5 mm,

d'où $\lambda/2 = 5.5.10^{-3} = 25.10^{-3} \Longrightarrow \lambda = 5.10^{-2}$ m

Comme $\lambda = VT$ *avec* $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 10^{-2}$s $\Longrightarrow V = \dfrac{\lambda}{T} = 5$ m/s.

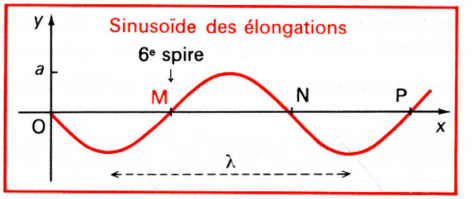
ÉNONCÉ

❷ Comment se répartissent, à l'instant $t = 0$, les compressions et les dilatations le long du ressort ?

CORRIGÉ

● *Considérons une spire, soit* y *son élongation comptée à partir de sa position d'équilibre,* x *la distance séparant sa position d'équilibre de celle de* S. *L'équation horaire de son mouvement est* $y = a \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right)$, *lorsque* $t = 0$ $y = -a \sin 2\pi \dfrac{x}{\lambda} = -10^{-3} \sin \dfrac{2\pi x}{5.10^{-2}}$

Représentons graphiquement cette fonction, cette sinusoïde nous permet de trouver les déplacements longitudinaux des spires à partir de leur position d'équilibre.

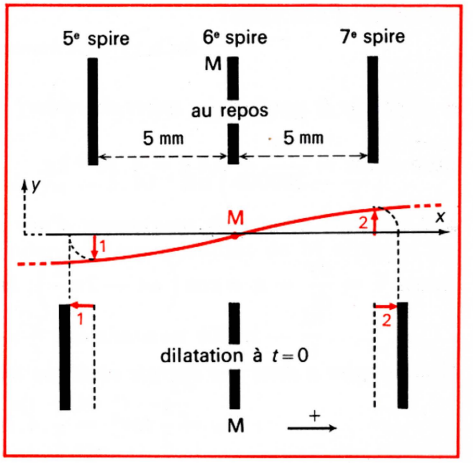


● *Étudions par exemple le déplacement des* 5e, 6e *et* 7e *spires. A l'instant* $t = 0$ *la* 6e *spire passe par sa position d'équilibre* M($OM = 25$ mm). *Nous avons représenté à l'échelle la fonction* $y = f(x)$ *au voisinage de* M.

La 5e *spire est écartée dans le sens négatif (nous avons représenté son déplacement par la flèche rouge* 1 : *pour passer de la flèche rouge* 1 *déterminée par le graphe à la flèche rouge* 1 *donnant le déplacement longitudinal réel il faut tourner de* $+\dfrac{\pi}{2}$).

De même la 7e *spire est écartée dans le sens positif (flèche rouge* 2*).*

Il s'ensuit que l'écartement entre la 5e *et la* 7e *spire est supérieur à* 1 cm : *il y a une dilatation en* M *à* $t = 0$.



● *On pourra montrer de la même façon que* M, P,... *sont des zones de dilatation ;* O, N,... *sont des zones de compression. Les compressions (ou les dilatations) successives sont distantes d'une longueur d'onde.*

ÉNONCÉ

❸ Etudier le mouvement de la 6e spire en fonction du temps. Indiquer à quels instants elle est le centre d'une zone de compression, de dilatation.

CORRIGÉ

● *La 6e spire est repérée avec les conventions de la 2e question, par* $x = 25.10^{-3}$ m. *Par suite l'équation horaire de son mouvement en fonction du temps est*

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 10^{-3} \sin \left(200\,\pi t - \frac{2\pi . 25 . 10^{-3}}{5 . 10^{-2}}\right) = 10^{-3} \sin (200\,\pi t - \pi)$$

$y = -10^{-3} \sin 200\,\pi t$ *(on aurait pu d'ailleurs écrire cette équation d'emblée puisque nous savons d'après la première question que la 6e spire est en opposition de phase avec la source).*

● *A l'instant* $t = 0$, *cette spire est le centre d'une zone de dilatation, il en sera de même aux instants* $t = kT$ (k *entier*) : *le ressort reprenant alors la même forme qu'à* $t = 0$.

● *Aux instants* $t = T/2$, *plus généralement* $t = T/2 + kT$ *la 6e spire repasse par sa position d'équilibre, mais est maintenant le centre d'une zone de compression (la sinusoïde des élongations s'obtient en translatant de* $\lambda/2$ *parallèlement à* Ox *la sinusoïde représentée à la question 2).*

● *En résumé : les compressions sont séparées des dilatations dans l'espace de* $\lambda/2$ (2e *question) dans le temps de* $T/2$ (3e *question).*

ÉNONCÉ

❹ On stroboscope avec une fréquence $N_e = 99{,}8$ Hz. Montrer que le train d'ondes a un mouvement apparent dont on déterminera la vitesse V_a.

CORRIGÉ

● *Chaque spire a un mouvement vibratoire apparent de fréquence* N_a, *de période* T_a; N *étant voisin de* N_e *la fréquence apparente* $N_a = N - N_e = 0{,}2$ Hz $\Longrightarrow T_a = 5$ s.

● *La stroboscopie modifie la période temporelle apparemment, mais ne modifie pas la période spatiale : deux compressions successives restent toujours séparées de* $\lambda = 5$ cm.

● *Par suite on observe une onde progressive se déplaçant apparemment de* $\lambda = 5$ cm *en* $T_a = 5$ s *à la vitesse apparente, constante* $V_a = \dfrac{\lambda}{T_a} = 1$ cm/s.

ÉNONCÉ

❺ Le ressort de longueur 99,5 cm a une masse égale à 80 g. Quelle est l'énergie cinétique maximale d'une spire?

CORRIGÉ

● *Evaluons le nombre des spires du ressort :* $\dfrac{99{,}5}{0{,}5} + 1 = 200$ *spires, la masse de chaque spire est* $m = \dfrac{80}{200} = 0{,}4\ g = 4 . 10^{-4}$ kg.

● *L'équation horaire du mouvement d'une spire est* $y = a \sin \left(\omega t - 2\pi \dfrac{x}{\lambda}\right)$, *d'où la vitesse* $\bar{v} = \dfrac{dy}{dt} = a\ \omega \cos \left(\omega t - 2\pi \dfrac{x}{\lambda}\right)$; *la vitesse maximale est*

$$v = a\ \omega = 10^{-3} \times 200\ \pi = 0{,}2 . \pi \text{ m/s}$$

Chaque spire a donc une énergie cinétique maximale

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} . 4 . 10^{-4} (0{,}2\ \pi)^2 = 8 . 10^{-5} \text{ J.}$$

6 Chaque spire étant considérée comme un oscillateur isolé, évaluer son énergie mécanique. En déduire la valeur de la puissance émise par la lame vibrante pour mettre le ressort en vibration.

ÉNONCÉ

CORRIGÉ

• *Chaque spire est un oscillateur isolé subissant une transformation mécanique (on néglige les frottements) : son énergie mécanique* E *est donc constante. Lorsque la spire passe par sa position d'équilibre son énergie potentielle est minimale (nous conviendrons qu'alors* $E_p = 0$*), son énergie cinétique est maximale et égale à* 8.10^{-5} J, *donc* $E = E_c = 8.10^{-5}$ J.

• *Lors de la progression du front d'ondes. les spires entrent tour à tour en vibration à raison de une tous les* t *secondes,* t *étant le temps nécessaire à l'onde progressive pour se déplacer de* 5 mm *d'où* $t = \frac{5.10^{-3}}{5} = 10^{-3}$s (V = 5 m/s). *Leur énergie mécanique passe de* 0 ($E_p = 0$ $E_c = 0$) *à* $E = 8.10^{-5}$J. *Cette énergie est fournie par la lame au ressort pendant* t *secondes, d'où la puissance émise par la lame vibrante* $\mathcal{P} = \frac{E}{t} = \frac{8.10^{-5}}{10^{-3}} = 8.10^{-2}$ W.

---

n° 105.

1 Une pointe P frappe périodiquement la surface d'une nappe d'eau, à la fréquence N = 200 Hz, produisant une vibration sinusoïdale d'amplitude $a = 0{,}5$ mm. On négligera la variation d'amplitude. On observe, en stroboscopant, des rides circulaires. La distance séparant deux crêtes successives égale 3 mm. Quelle est la vitesse de propagation des ondes?

ÉNONCÉ

CORRIGÉ

• *Deux crêtes consécutives sont séparées d'une longueur d'onde, par suite*

$$\lambda = 3 \text{ mm} = 3.10^{-3} \text{ m.}$$

Comme $\lambda = VT \Longrightarrow V = \frac{\lambda}{T} = \lambda N = 3.10^{-3} \times 200 = 0{,}6$ m/s.

2 On place sur l'eau un petit morceau de liège M situé à la distance $r = 10$ mm de P. Ecrire l'équation horaire du mouvement de P et l'équation horaire du mouvement de M.

ÉNONCÉ

CORRIGÉ

• *Comptons les élongations à partir des positions d'équilibre. A l'instant* t = 0, P *passe par sa position d'équilibre, dans le sens positif, vers le haut.*

L'équation horaire du mouvement de P *s'écrit* $y_P = a \sin 2\pi \frac{t}{T} = 5.10^{-4} \sin 400\,\pi t$

• M *reproduit le mouvement de* P $\mathcal{T} = \frac{r}{V}$ *secondes après d'où*

$$y_M = a \sin \left(2\pi \frac{t - \mathcal{T}}{T}\right) = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) = 5.10^{-4} \sin \left(400\,\pi t - 2\pi \frac{10}{3}\right),$$

ajoutons $(3 \times 2\pi)$ *à la phase initiale* $y_M = 5.10^{-4} \sin \left(400\,\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$

3 Calculer la différence de phase correspondant à deux positions de M séparées par 10^{-3} s.

ÉNONCÉ

CORRIGÉ

A un instant t : $y_M = 5.10^{-4} \sin \left(400\,\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$ *la phase est* $400\,\pi t - \frac{2\pi}{3}$.

A un instant $t + 10^{-3}$ s *la phase devient* $400\,\pi(t + 10^{-3}) - \frac{2\pi}{3}$.

La phase a augmenté de $400\,\pi.10^{-3} = 0{,}4\,\pi$ rd $= 72°$

ÉNONCÉ

❹ Calculer la vitesse maximale de M.

CORRIGÉ

La vitesse de M *est la dérivée de* y_M *par rapport au temps, d'où*

$$\bar{v} = y_M = 5.10^{-4} \times 400\,\pi \cos\left(400\,\pi t - \frac{2\pi}{3}\right),$$

la vitesse est maximale en valeur arithmétique lorsque la valeur absolue du cosinus égale 1,

d'où $$v = 5.10^{-4} \times 400\,\pi = \frac{\pi}{5} = 0{,}63 \text{ m/s}.$$

ÉNONCÉ

❺ On place un deuxième petit morceau de liège M′ situé à la distance $r' = 17{,}5$ mm de P. Calculer à un instant donné la différence de phase entre M et M′. Conclure.

CORRIGÉ

- *L'équation horaire de* M, *en prenant pour conditions initiales, celles énoncées dans la* 2e *question est* $y_M = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)$.
- *L'équation horaire de* M′, *avec ces mêmes conventions, est* $y_{M'} = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r'}{\lambda}\right)$.

La différence de phase entre M *et* M′ *est*

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r'}{\lambda}\right) = 2\pi\left(\frac{r' - r}{\lambda}\right) \qquad \frac{r' - r}{\lambda} = \frac{17{,}5 - 10}{3} = \frac{7{,}5}{3}$$

d'où $\varphi = \frac{15\pi}{3} = \pi + (2 \times 2\,\pi)$ M′ *et* M *sont donc en opposition de phase (lorsque* M *passe par sa position la plus élevée,* M′ *passe par sa position la plus basse et inversement).*

ÉNONCÉ

❻ Déterminer le lieu géométrique des points de l'eau qui sont à leur altitude maximale lorsque P passe par sa position d'équilibre en montant.

CORRIGÉ

- P *passe par sa position d'équilibre en montant aux instants* $t = kT$ k *entier.*
- *Soit un point de l'eau situé à la distance* r, *son élongation* $y = a \sin 2\,\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)$ *est égale, aux instants* $t = kT$ *à* $y = a \sin\left(\frac{2\pi\,kT}{T} - \frac{2\pi\,r}{\lambda}\right)$, *c'est-à-dire en retranchant* k *fois* $2\,\pi$ *à la phase* $y = -a \sin\frac{2\pi\,r}{\lambda}$.
- *Cherchons parmi ces points ceux dont l'élongation est maximale c'est-à-dire*

$$y = a \Longleftrightarrow -\sin\frac{2\pi r}{\lambda} = 1 \Longleftrightarrow \frac{2\pi r}{\lambda} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

c'est-à-dire $r = \frac{3\lambda}{4} + k\lambda$ (k *entier positif*); *comme* $\lambda = 3$ mm $\Longrightarrow r = 2{,}25 + 3k$ (mm).

Ces points forment les crêtes qui sont des cercles concentriques autour de P, *équidistants de* 3 mm *(on retrouve bien que la période spatiale est* $\lambda = 3$ mm*).*

Vitesse du son

n° 106.

ÉNONCÉ

❶ Une explosion se produit à 5 km d'un observateur, il en entend le bruit 14,7 s après l'avoir vue. Quelle est la vitesse de propagation du son au moment de l'expérience ?

CORRIGÉ

Négligeons la durée nécessaire à la lumière pour faire les 5 km, *avec cette approximation, le son a donc mis* t = 14,7 s *pour faire* x = 5 km, *le mouvement de propagation étant uniforme :* $V = \frac{x}{t} = \frac{5\,000}{14{,}7} = 340$ m/s.

ÉNONCÉ

❷ L'intervalle de temps a été mesuré à 0,1 s près. Etait-il légitime de négliger le temps mis par la lumière pour parvenir jusqu'à l'observateur. La vitesse de la lumière est $c = 300\,000$ km/s.

CORRIGÉ

La lumière se propage à vitesse constante, elle met $\frac{5\,000}{3 \cdot 10^8} = \frac{5}{3} . 10^{-4}$ s, *cette durée est négligeable devant l'incertitude* 0,1 s.

ÉNONCÉ

❸ Dans l'air à 0 °C, la vitesse du son est 331 m/s. Quelle est la température, supposée uniforme, de l'air au moment de l'expérience ?

CORRIGÉ

A $T_0 = 273$ °K, *la vitesse est* $V_0 = 331$ m/s
A T, *la vitesse dans l'air est* V = 340 m/s.
La vitesse de propagation du son est proportionnelle à la racine carrée de la température absolue d'où :

$$\frac{V}{V_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}} \Longrightarrow T = T_0 \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = 273 \left(\frac{340}{331}\right)^2 = 288^\circ \text{K}$$

c'est-à-dire 15 °C.

ÉNONCÉ

❹ Calculer la vitesse de propagation du son dans l'hydrogène à 0 °C ? H = 1. L'air sera considéré comme étant constitué de gaz diatomiques.

CORRIGÉ

- *Soit* V *la vitesse du son dans l'hydrogène. La masse molaire de l'hydrogène* H_2 *est* M = 2 g, *la densité de l'hydrogène par rapport à l'air est donc* $d = \frac{M}{29} = \frac{2}{29}$
- *Soit* V_0 *la vitesse du son dans l'air* ($V_0 = 331$ m/s)
- *Les deux gaz étant diatomiques de même coefficient* γ, *à la même température, la vitesse du son est inversement proportionnelle à la racine carrée de la densité :*

$$\frac{V}{V_0} = \sqrt{\frac{1}{d}} \Longrightarrow V = V_0 \sqrt{\frac{1}{d}} = 331 \sqrt{\frac{29}{2}} = 1\,260 \text{ m/s}.$$

n° 107.

ÉNONCÉ

❶ Evaluer la vitesse du son dans l'air à 20 °C. On donne :
— masse volumique de l'air dans les conditions normales 1,29 kg/m³;
— pour les gaz diatomiques $\gamma = 1{,}40$;
— la pression atmosphérique normale est $1{,}01.10^5$ Pa.
On néglige les traces de gaz qui ne sont pas diatomiques.

CORRIGÉ

• *D'après la formule de Laplace* $V = \sqrt{\dfrac{\gamma P_0 T}{a_0 d T_0}}$, *avec ici* $d = 1$

$P_0 = 1{,}01.10^5$ Pa. $a_0 = 1{,}29$ kg/m³. $T_0 = 273$ °K. $T = 293$ °K.
D'où $V = 341$ m/s.

ÉNONCÉ

❷ Quelle est l'incertitude sur ce résultat. On admettra que l'incertitude sur les données correspond à une unité du dernier chiffre significatif.

RÉPONSE

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma} + \frac{\Delta P_0}{P_0} + \frac{\Delta a_0}{a_0} + \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta T_0}{T_0}\right) \Longrightarrow \Delta V = 6 \text{ m/s}.$$

ÉNONCÉ

❸ De combien varie la vitesse et dans quel sens lorsque la température augmente de 1 °C?

CORRIGÉ

Lorsque la température augmente de 1° *Celsius, cela correspond aussi à une augmentation de* 1° *Kelvin. Par suite,* δ *désignant une petite variation,* $\delta T = 1°$ K

D'après la formule de Laplace $\dfrac{\delta V}{V} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\delta T}{T} \Longrightarrow \delta V = \dfrac{1}{2}\dfrac{\delta T}{T} \cdot V = \dfrac{341}{2 \times 293} \simeq 0{,}6$ m/s

La vitesse a donc augmenté de 0,6 m/s.

ÉNONCÉ

❹ Déterminer la vitesse du son dans un mélange, contenant x % en volume de gaz G_1 et $(100 - x)$ % en volume de gaz G_2, en fonction de la vitesse du son dans l'air à la même température. G_1 et G_2 sont des gaz diatomiques de densité d_1 et d_2 par rapport à l'air.
Application numérique : $x = 30$. G_1 est de l'oxygène. G_2 de l'hydrogène; O = 16; H = 1.

CORRIGÉ

• *Soit* V_a *la vitesse du son dans l'air à* t°C, V_m *la vitesse du son dans le mélange à* t °C, *les gaz étant diatomiques ont même* γ, *d'où* $\dfrac{V_m}{V_a} = \sqrt{\dfrac{1}{d}}$, d *étant la densité du mélange par rapport à l'air.*

• *Evaluons* d *en raisonnant sur des volumes de* 100 l *de mélange et d'air pris dans les mêmes conditions de température et de pression :*

$$d = \frac{\text{masse de 100 l de mélange}}{\text{masse de 100 l d'air}} = \frac{\text{masse de x l de } G_1}{\text{masse de 100 l d'air}} + \frac{\text{masse de (100 — x) l de } G_2}{\text{masse de 100 l d'air}}$$

$$\text{d'où } d = \frac{x}{100}\frac{\text{masse de 1 ℓ de } G_1}{\text{masse de 1 ℓ d'air}} + \frac{(100 - x)}{100}\frac{\text{masse de 1 ℓ de } G_2}{\text{asse de 1 ℓ d'air}}$$

$$= \frac{x}{100} d_1 + \left(\frac{100 - x}{100}\right) d_2.$$

Application numérique : $d_1 = \dfrac{32}{29} d_2 = \dfrac{2}{29}$ *d'où* $d = \dfrac{11}{29}$ *d'où* $V_m = V_a\sqrt{\dfrac{29}{11}} = 1{,}62\, V_a$.

Contrôles

Pb 27 à Pb 31

Contrôle n° 1. Une diligence a des roues de diamètre 1,2 m. Chaque roue comprend 10 rayons régulièrement répartis. Cette diligence roule à une vitesse v. Elle est filmée par une caméra qui prend 20 images par seconde. Pour quelles valeurs de v (en km/h). les rayons semblent-ils immobiles (on admettra que $v \in \{0{,}60$ km/h.$\}$
Que se passe-t-il lorsque la vitesse passe de 25 km/heure à 29 km/heure?

Contrôle n° 2. Un diapason inscrit ses vibrations sur un cylindre enregistreur, tournant à vitesse constante N = 40 tr/mn, de diamètre 20 cm. On a d'abord tracé un axe, le diapason restant au repos. La courbe enregistrée lorsque le diapason vibre coupe cet axe suivant une série de points. La distance séparant un premier point du centième égale 20 cm. Quelle est la fréquence du mouvement du diapason?

Contrôle n° 3.

❶ On stroboscope une lame vibrante. La fréquence maximale des éclairs pour laquelle la lame paraît toujours immobile est de 120 Hz. Quelle est la fréquence de la vibration? Pour quelles autres fréquences la lame paraît-elle immobile? Montrer qu'il existe une fréquence supérieure à 120 Hz pour laquelle, dans une circonstance particulière, on voit une lame immobile. Quelle est alors sa position? Quelle est cette fréquence?

❷ La fréquence des éclairs est 480 Hz, on observe trois lames immobiles, que peut-on dire de leurs positions? Ont-elles la même apparence?

Contrôle n° 4.

❶ Un dispositif approprié laisse tomber en chute libre, de l'eau goutte à goutte, à raison de 10 gouttes par seconde. On éclaire la verticale de chute à l'aide d'une source lumineuse devant laquelle tourne un disque comportant 5 fenêtres régulièrement réparties sur sa périphérie. Montrer que pour une vitesse de rotation convenable du disque, n tr/s, on voit une succession de gouttes immobiles. Déterminer la valeur maximale n_0 de n. Comment se répartissent les gouttes sur la verticale? Sont-elles équidistantes?

❷ Qu'observe-t-on lorsque n est un peu inférieur à n_0? puis un peu supérieur à n_0?

❸ Ces gouttes tombent sur la surface d'une nappe d'eau. Il se forme des rides circulaires centrées sur le point de chute O. Entre deux crêtes consécutives la distance mesurée radialement est 6 cm. Quelle est la célérité de la propagation des ébranlements transversaux à la surface de l'eau?

❹ Soit a = 1 mm l'amplitude du mouvement vibratoire qui prend ainsi naissance, et que nous supposerons sinusoïdal. Etudier le mouvement des trois points suivants : O, point de chute; M situé à 7,5 cm de O; N situé à 15 cm de O. Dessiner à un instant t l'aspect de la surface d'eau entre O et N (échelle; en ordonnée 1 mm sera représenté par 1 cm; en abscisse 1 cm par 1 cm). On négligera l'amortissement, l'instant t est tel que M passe par sa position d'équilibre, vers le haut.

Contrôle n° 5. A l'extrémité, S, de l'une des branches d'un diapason, on fixe un fil de longueur 2 m, de masse 40 g, subissant une tension égale à 0,5 N. S vibre, perpendiculairement au fil, avec une fréquence de 250 Hz, et une amplitude a = 1 mm. On néglige l'amortissement et les réflexions aux extrémités du fil.

❶ Quelle est la longueur d'onde de la vibration qui se propage le long du fil?

❷ Ecrire l'équation horaire du mouvement d'un point M de la corde. On choisira comme origine des temps l'instant où S *part* de sa position d'équilibre, dans le sens positif, vers le haut.
Application :
a) Tracer dans un même système d'axes le diagramme du mouvement de S et celui de M (SM = 4,5 cm à l'équilibre).
b) Combien de points de la corde vibrent en opposition de phase avec S ?

❸ Quelle est la forme de la corde à un instant donné ?
Application : Dessiner l'aspect de la corde à l'instant $t_1 = 1{,}2.10^{-2}$s puis à l'instant $t_2 = 1{,}3.10^{-2}$s, dans un même système d'axes. Déterminer, à partir de ce dessin, la célérité des ondes.

❹ On stroboscope, à une fréquence légèrement inférieure à celle de la lame. Celle-ci paraît accomplir une oscillation en 2 s. Quelle est la fréquence des éclairs ? Quelle est la célérité apparente des ondes ?

Contrôle n° 6.

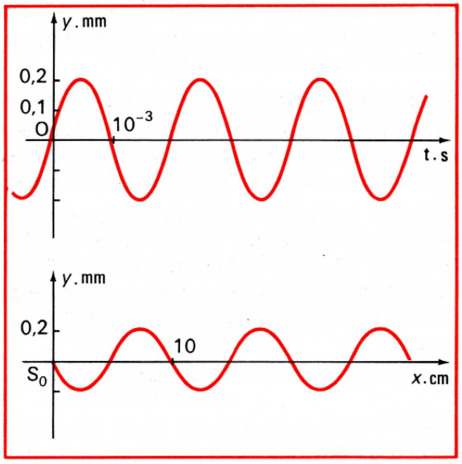
❶ L'extrémité S d'une corde de fer de masse m, de longueur l, tendue par une force $\vec{F}$, est animée d'un mouvement vibratoire transversal dont l'élongation est donnée en millimètres par $y = 0{,}5 \sin 200\,\pi t$. Déterminer l'amplitude, la fréquence et la période de S. Connaissez-vous un moyen d'entretenir le mouvement de S ?

❷ A 0 °C, pour une tension de F = 40 N, la longueur de la corde est $l_0 = 4$ m. Sachant que la masse de la corde est $m = 4$ g, en déduire la célérité de propagation des ébranlements transversaux V_0, et la longueur d'onde λ_0.

❸ Calculer la variation de vitesse et de longueur d'onde si la température passe de 0 °C à 20 °C. La tension reste 40 N. Le coefficient de dilatation linéaire de la corde est $k = 2.10^{-5}$ °C^{-1}.

❹ La température est 0 °C, la tension devient F′ = 10 N.
a) En supposant que la longueur de la corde reste $l_0 = 4$ m, quelle serait la nouvelle longueur d'onde λ'_0 ?
b) En fait la corde diminue de 4 mm de longueur. De combien faut-il corriger λ'_0 ?

Contrôle n° 7. Un milieu élastique est parcouru par des ondes progressives transversales sinusoïdales. On a tracé le diagramme du mouvement de la source S (sinusoïde des temps) et la sinusoïde des espaces à l'instant $t = 0$.



❶ Déterminer la vitesse de propagation des ondes.

❷ Ecrire l'équation horaire du mouvement d'un point M situé à 12,5 cm de O.

❸ Déterminer le sens du mouvement de S à l'instant $t = 0$, en considérant successivement :
a) la sinusoïde des temps ;
b) la sinusoïde des espaces.
Les deux méthodes conduisent-elles au même résultat ?

❹ Dessiner la sinusoïde des espaces à l'instant $t = 5.10^{-4}$ s.

❺ Le mouvement de S a commencé à l'instant $t = -4.10^{-3}$ s. Comment faut-il modifier le diagramme des espaces ?

Contrôle n° 8.

❶ Une source sonore, vibre sinusoïdalement, l'amplitude est a, la fréquence N. On étudie les ondes sonores le long d'un axe Sx, en négligeant l'amortissement. Soit M un point de Sx, d'abscisse, à l'équilibre, SM $= x$, d'élongation, comptée à partir de sa position d'équilibre, y. Ecrire l'équation horaire du mouvement de M. On désignera par λ la longueur d'onde.

❷ Représenter dans un système d'axes Sx, Sy, les élongations des points de Sx à un instant t_0 déterminé (sinusoïde des espaces).

❸ Sous le schéma précédent, tracer, à l'aplomb de Sx, un deuxième axe Sx. Marquer sur cet axe les tranches d'air qui sont à leur position d'équilibre. Indiquer par des flèches les déplacements des tranches voisines. En déduire les zones de compression et de dilatation.

❹ Soit P la pression de l'air, P_0 sa pression à l'équilibre, que peut on dire de la variation de pression : $p = P - P_0$, au niveau d'une compression? d'une dilatation? Est-elle extrémale? Quel est son signe? Sous le schéma précédent, représenter, qualitativement, dans un système d'axes Sx, Sp, les variations de pression p des points de Sx à l'instant t_0. (On doit donc avoir trois axes Sx parallèles, trois origines S sur une même verticale.)

❺ En admettant que la dernière courbe tracée est une sinusoïde, montrer que les deux courbes tracées en ❷ et ❹ ont pour équations :

$$y = a \sin 2\pi\left(-\frac{x}{\lambda} + \frac{t_0}{T}\right) \qquad p = p_m \sin 2\pi\left(-\frac{x}{\lambda} + \frac{t_0}{T} + \frac{1}{4}\right).$$

En déduire que, en un point donné, M, la variation de pression (P — P_0) est en quadrature avance sur l'élongation y. Donner l'expression de (P — P_0) au niveau de la source S.

Contrôle n° 9. La célérité du son dans l'oxygène pur est à 15 °C $V_0 = 323$ m/s.

❶ Calculer la vitesse du son dans l'hydrogène à 15 °C.

❷ Calculer la vitesse du son dans un mélange comprenant en volume 1/3 d'hydrogène et 2/3 d'oxygène à 15 °C.

❸ Quelle est la composition en volume d'un mélange hydrogène-oxygène à 15 °C, sachant que le son s'y propage à 646 m/s. Cette méthode serait-elle valable pour déterminer la composition d'un mélange monoxyde de carbone et azote?

❹ Quelle est la vitesse du son dans le gaz carbonique à 15 °C. On donne $\gamma = 1{,}33$ pour un gaz triatomique, $\gamma = 1{,}4$ pour un gaz diatomique. O = 16, H = 1, C = 12, N = 14.

Contrôle n° 10. Une lame d'acier, horizontale, est fixée dans un étau en O, M est son extrémité libre. La partie libre de la lame, OM, a une longueur l et une masse m. La lame peut se plier en O, OM restant un segment rectiligne, de moment d'inertie $J = \frac{1}{3} m l^2$ par rapport à l'axe de rotation passant par O. On négligera le poids de la lame.

❶ On accroche en M une charge de poids P, OM pivote d'un *petit* angle α, M se déplace d'une distance d. Le moment du couple élastique de rappel est égal à $C\alpha$. Evaluer la constante C.
Application numérique : P = 10,0 ± 0,1 N; l = 10,0 ± 0,1 cm; d = 3,0 ± 0,1 mm.

❷ La charge est retirée. On écarte la lame de sa position d'équilibre, M est déplacé d'une petite distance a, la lame est lâchée sans vitesse initiale. Quelle est la fréquence de son mouvement vibratoire? Quelle est l'incertitude sur ce résultat?
Application numérique : m = 10,0 ± 0,1 g; a = 3 mm; les autres données sont celles du ❶
Exprimer, en fonction de a, l'énergie mécanique de la lame. On posera que, lorsque la lame est immobile, à sa position d'équilibre, son énergie mécanique est nulle.
Application numérique : les données sont inchangées.

❸ On éclaire la lame en mouvement par une lampe produisant des éclairs successifs dont on peut connaître et régler la fréquence. Lorsque cette dernière augmente, depuis zéro, la lame paraît immobile pour une valeur maximale égale à 156 Hz. En déduire la fréquence du mouvement de la lame. Les fréquences des éclairs sont connues à 3 Hz près. Le résultat de cette mesure est-il en accord avec celui de l'application numérique du ❷?

❹ On étudie le mouvement dans les conditions de l'application numérique du ❷. Initialement, l'amplitude du mouvement de M égale 3 mm, compte tenu de l'amortissement elle diminue progressivement, au bout d'une seconde elle est égale à $\frac{3}{q}$ mm; d'une manière générale, d'une seconde à l'autre, l'amplitude est divisée par q. Sachant que au bout de 100 s l'amplitude égale 0,1 mm, déterminer le coefficient constant, q.
Evaluer la quantité de chaleur dissipée :
a) pendant la première seconde du mouvement;
b) pendant toute la durée du mouvement.

❺ On dispose un électro-aimant au-dessus de la lame. Il entretient son mouvement vibratoire, l'amplitude de M reste égale, pratiquement, à 3 mm. Déterminer :
a) la fréquence du courant alternatif qui alimente l'électro-aimant;
b) la puissance développée par l'électro-aimant.

Contrôle n° 11. Un observateur écoute le son émis par un sifflet situé à une distance d.

❶ L'énergie vibratoire, que l'on supposera se conserver intégralement, est régulièrement répartie sur des surfaces d'ondes sphériques, de rayon d, et centrées sur le sifflet. On néglige les réflexions sur le sol ou sur tout autre obstacle.
a) L'observateur captant toujours une même portion (d'aire s constante) de surface d'onde, comment varie, en fonction de la distance d, l'énergie vibratoire qu'il reçoit en un temps donné?
b) La puissance vibratoire étant proportionnelle au carré de l'amplitude a, exprimer a en fonction de d et de l'amplitude A à 100 mètres du sifflet.

❷ Les distances d envisagées dans cette question sont suffisamment grandes pour que l'on puisse considérer comme planes les petites portions d'ondes captées par l'oreille.
a) Si, à la distance d, l'élongation y d'une tranche d'air est donnée à chaque instant t, en fonction de la pulsation ω par $y = a \sin \omega t$; donner l'expression de l'élongation y à une distance $(d + x)$ suffisamment voisine de d pour que l'amplitude puisse être considérée comme constante et toujours égale à a dans l'intervalle d, $d + x$.
Application numérique : $a = 1\ \mu$, $\omega = 3\,000$ rd/s, le son se propage à $V = 330$ m/s.
b) On démontre que les variations de pression $p\text{-}p_0$ autour de la pression moyenne p_0 sont données par

$$p - p_0 = -\rho V^2 \frac{dy}{dx}.$$

La masse volumique de l'air $\rho = 1{,}3$ kg/m³. $\frac{dy}{dx}$ est la dérivée de y par rapport à la seule variable x.
Calculer l'amplitude de la variation de pression dans les conditions du *a*).

Contrôle n° 12. Une source S d'ondes planes a pour équation $y_S = a \sin \frac{2\pi t}{T}$. Une tranche d'air M située à la distance x de s a pour équation $y = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$.

Montrer que $\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ étant la dérivée seconde de y par rapport à t, V étant la vitesse de propagation des ondes planes.

Superposition des vibrations — Battements
Interférences mécaniques

Pb 32
Pb 33

■ Conseils généraux

L'élongation d'un point M d'un milieu élastique soumis à deux vibrations, est la somme vectorielle des élongations que chaque vibration agissant seule lui donnerait. $\vec{y} = \vec{y_1} + \vec{y_2}$.

- Si les élongations sont colinéaires et sont mesurées algébriquement sur un même axe, elles s'ajoutent alors algébriquement.
- Pour exploiter cette somme algébrique, la méthode la plus générale consiste à représenter y_1 et y_2 par des vecteurs de Fresnel $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ dans ce cas

$$y = y_1 + y_2 \Longleftrightarrow \vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}.$$

- Si les amplitudes de y_1 et y_2 sont égales on pourra utiliser les méthodes trigonométriques.
- Les relations $d_2 - d_1 = k\lambda$ et $d_2 - d_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ ne donnent les lignes d'amplitude maximale et minimale à la surface d'un liquide que si les sources vibrent en phase.
- Pour les ondes longitudinales il est beaucoup plus facile de raisonner avec les variations de pression (voir n° 111 et n° 112).

---

n° 108. Quelle est l'équation horaire du mouvement d'un point matériel soumis à deux vibrations, de même direction, qui lui communiqueraient, séparément, des mouvements d'équation horaire $y_1 = a_1 \sin \omega t$; $y_2 = a_2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$.

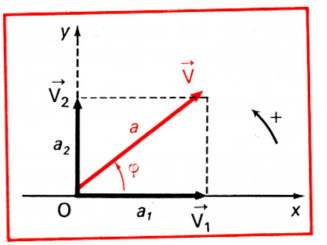
ÉNONCÉ

Application numérique $a_1 = 4.10^{-4}$m $a_2 = 3.10^{-4}$m $\omega = 200\pi$ rd/s.

Dessiner les vecteurs de Fresnel et les diagrammes des mouvements.

CORRIGÉ

- *D'après le principe de la superposition des petits mouvements, l'élongation* y *du point matériel est à chaque instant* $y = y_1 + y_2$. *Soient* $\vec{V_1}$ *le vecteur de Fresnel représentant* y_1 *(conventionnellement on représente les vecteurs de Fresnel à l'instant* $t = 0$*),* $\vec{V_2}$ *le vecteur représentant* y_2; y *est représentée par* $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$.



- *L'ensemble* $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$, $\vec{V}$ *tourne à* $\omega = 200\ \pi$ rd/s *sans se déformer, cela implique donc que* y *est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation* $\omega = 200\ \pi$ rd/s.

Cherchons l'amplitude a *de* y *c'est-à-dire la longueur de* $\vec{V}$:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 = 25.10^{-8} \Longrightarrow a = 5.10^{-4}\text{m}$$

A l'instant $t = 0$ $(\vec{OX}, \vec{V}) = \varphi$ *(phase initiale) :* $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_2}{a_1} = 0{,}75$,

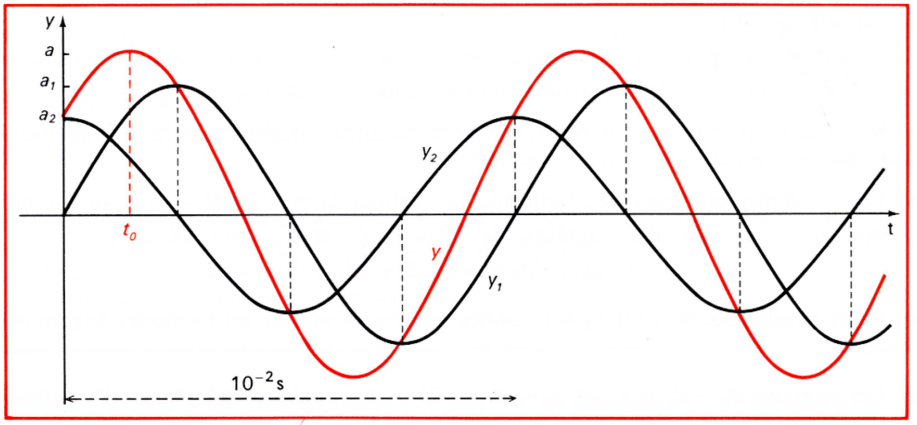
par suite $\varphi = 37^\circ = 0{,}64$ rd.

En résumé $y = a \sin(\omega t + \varphi) = 5.10^{-4} \sin(200\ \pi t + 0{,}64)$.

● *Les diagrammes des mouvements sont des sinusoïdes de même période.*

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{200\pi} = \frac{1}{100}$ *s. Pour tracer ces diagrammes on peut se servir de la représentation de Fresnel : ainsi à l'instant* $t = 0$ *la projection de* $\vec{V_1}$ *sur l'axe des* y *est nulle :* $y_1 = 0$; *la projection de* $\vec{V_2}$ *sur l'axe des* y *est* $y_2 = a_2$; *la projection de* $\vec{V}$ *est* $y = a_2$.

CORRIGÉ



Cherchons par exemple le temps t_0 *du premier passage de* $\vec{V}$ *par* $\vec{Oy}$ *et dans le même sens (alors* $y = a$*) : il faut que* $\vec{V}$ *tourne de* $\frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - 0{,}64 = 1{,}57 - 0{,}64 = 0{,}93$ rd, *comme* $\vec{V}$ *tourne à* $200\ \pi$ rd/s.

$$t_0 = \frac{0{,}93}{200\pi} = 1{,}48.10^{-3}\ \text{s.}$$

Il est intéressant de remarquer que y_1 *et* y_2 *sont en quadrature, que* $y = \pm a_2$ *quand* $y_1 = 0$, *que* $y = \pm a_1$ *quand* $y_2 = 0$, *cela s'interprète facilement par les vecteurs de Fresnel.*

ÉNONCÉ

n° 109. Un point M d'un milieu élastique est soumis à deux vibrations de même direction, qui lui communiqueraient séparément des mouvements d'équation horaire $y_1 = a_1 \sin \omega_1 t$ $y_2 = a_2 \sin \omega_2 t$ avec $\omega_2 > \omega_1$ et $\omega_2 \simeq \omega_1$.

❶ Quelle est la période des battements ?

CORRIGÉ

Soient $\vec{V_1}$ *et* $\vec{V_2}$ *les vecteurs de Fresnel représentant* y_1 *et* y_2. *L'amplitude est maximale à chaque fois que* $\vec{V_2}$ *recouvre* $\vec{V_1}$. *Le vecteur* $\vec{V_2}$ *a par rapport au vecteur* $\vec{V_1}$ *une vitesse angulaire relative égale à* $\omega_2 - \omega_1$ rd/s *c'est-à-dire* $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$ tr/s, *par suite* $\vec{V_2}$ *repasse sur* $\vec{V_1}$ $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$ *fois par seconde, il y a donc* $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$ *maxima d'amplitude par seconde, ce nombre mesure la fréquence des battements* $\nu = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$, *la période des battements est*

$$\frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}\ \textit{secondes.}$$

ÉNONCÉ

2 On donne $a_1 = a_2 = 10^{-5}$ m $\quad \omega_1 = 400\,\pi$ rd/s ; $\omega_2 - \omega_1 = 0{,}2\pi$ rd/s. Ecrire l'équation horaire de M. Donner l'aspect du diagramme du mouvement.

CONSEIL

Les amplitudes étant égales, on peut faire un calcul trigonométrique. On interprétera l'élongation résultante y en remarquant qu'on peut mettre y sous la forme $y = A \sin \omega t$; A, considérée comme l'amplitude, variant lentement.

- *D'après le principe de la superposition des petits mouvements :*

$$y = y_1 + y_2 = a_1 \,(\sin\ \omega_1 t + \sin\ \omega_2 t) \text{ sachant que } \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

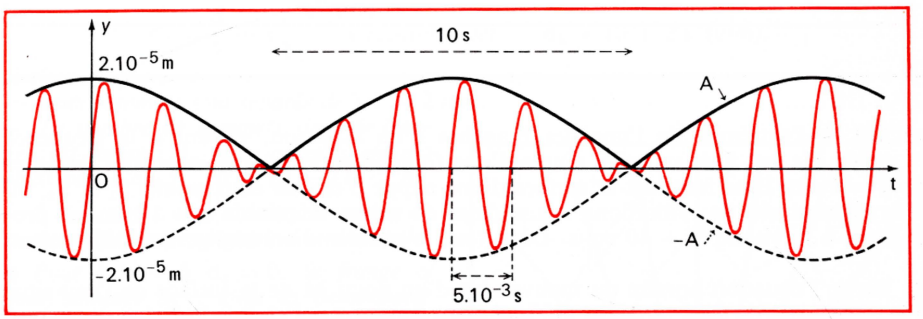
$$y = 2a_1 \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t = 2.10^{-5} \cos 0{,}1\pi t \cdot \sin 400\pi t$$

pratiquement $\left(\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} \simeq \omega_1\right)$.

- $\cos 0{,}1\pi t$ *a pour période* $\dfrac{2\pi}{0{,}1\pi} = 20$ *s*; $\sin 400\pi t$ *a pour période* $\dfrac{2\pi}{400\pi} = 5.10^{-3}$ s, *on peut donc considérer que* y *est pratiquement une fonction sinusoïdale de période* 5.10^{-3} s, *dont l'amplitude* $A = 2.10^{-5} |\cos 0{,}1\ \pi t|$ *varie lentement : la période de* A, *deux fois plus faible que celle de* $\cos 0{,}1\ \pi t$ *est* 10 s *(voir graphe).*

- *Comme* $\sin 400\ \pi t$ *est toujours compris entre* -1 *et* $+1$, y *est donc toujours compris entre* $-$ A *et* $+$ A.

CORRIGÉ



Pour tracer la courbe, on tracera donc $A = 2.10^{-5} |\cos 0{,}1\ \pi t|$, *puis* $-$A; *la courbe représentant* y *doit rester à l'intérieur de ces fuseaux. Nous n'avons pas représenté toute les sinuosités de* y, *il y en aurait* $\dfrac{10}{5 \cdot 10^{-3}} = 2\,000$ *par fuseau!*

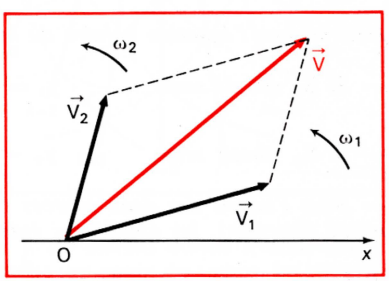
On retrouve bien ainsi que la période des battements est 10 *s (période de* A*) ce qui correspond bien au résultat de la première question :* $\dfrac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \dfrac{2\pi}{0{,}2\pi} = 10$ s.

ÉNONCÉ

3 On donne $a_1 = 10^{-5}$ m $\quad a_2 = 5.10^{-6}$ m. Les fréquences sont inchangées.
Dessiner l'aspect du diagramme du mouvement.

CONSEIL

Etudier la déformation du parallélogramme formé par les vecteurs de Fresnel, $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$.



- *Là encore* $y = y_1 + y_2 \Longrightarrow \vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$.
- *Ces vecteurs tournent sensiblement à la même vitesse* $\omega_1 = 400\ \pi$ rd/s, y *a donc sensiblement une période égale à* $\dfrac{2\pi}{\omega_1}$ *soit* 5.10^{-3} s.

CORRIGÉ

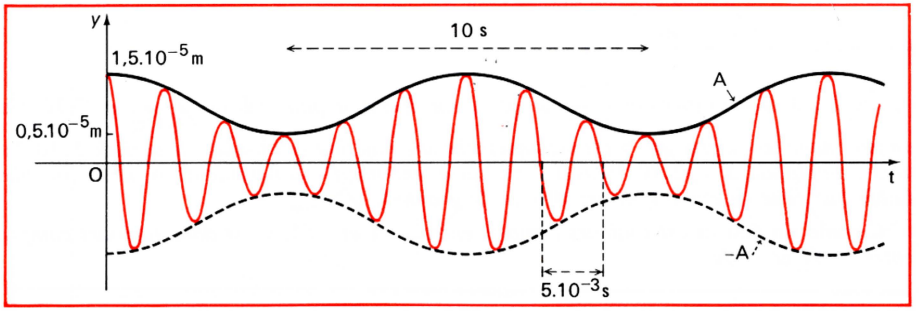
● $\overrightarrow{V_2}$ *tourne un peu plus vite que* $\overrightarrow{V_1}$, *par rapport à* $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ *tourne à* $\omega_2 - \omega_1 = 0{,}2\ \pi$ rd/s *soit* 0,1 tr/s, *il s'ensuit que* V *varie lentement :*

$\overrightarrow{V_2}$ *repasse donc sur* $\overrightarrow{V_1}$ *toutes les* 10 *s, alors* $V = V_1 + V_2$, *l'amplitude de* y *est égale alors à* $a_1 + a_2 = 1{,}5.10^{-5}$m : *elle est maximale.*

$\overrightarrow{V_2}$ *est opposé à* $\overrightarrow{V_1}$ *toutes les* 10 s, *alors* $V = V_1 - V_2$, *l'amplitude de* y *est égale alors à* $a_1 - a_2 = 0{,}5.10^{-5}$m : *elle est minimale.*

● *Le diagramme a donc l'aspect suivant :*

CORRIGÉ



ÉNONCÉ

n° 110. A l'extrémité de l'une des branches d'un diapason, vibrant à la fréquence N = 100 Hz, est fixée une tige munie d'une fourchette dont les pointes sont distantes de $d = 2$ cm. Elles frappent la surface d'une nappe d'eau en deux points S_1 et S_2, où elles déterminent des vibrations sinusoïdales de même amplitude $a = 1$ mm, se propageant à la vitesse V = 40 cm/s. Dans tout le problème on néglige l'amortissement.

❶ Ecrire l'équation horaire du mouvement d'un point M de la surface de l'eau situé à la distance d_1 de S_1 et d_2 de S_2. On indiquera comment est choisie l'origine des temps. Application numérique : $d_1 = 1{,}1$ cm, $d_2 = 2$ cm.

● *Evaluons la longueur d'onde* $\lambda = VT = \dfrac{V}{N} = \dfrac{0{,}4}{100} = 4.10^{-3}\text{m} = 4$ *mm.*

A l'instant $t = 0$, *supposons que* S_1 *et* S_2 *passent, par leur position d'équilibre dans le sens positif, l'équation horaire du mouvement des sources s'écrit alors :*

$$y_{S_1} = y_{S_2} = a\ \textit{sin}\ 2\pi\frac{t}{T}.$$

Déterminons l'équation horaire du mouvement de M :

CORRIGÉ

— *Si* S_1 *vibrait seule* $\quad y_1 = a\ \textit{sin}\ 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{d_1}{\lambda}\right).$

— *Si* S_2 *vibrait seule* $\quad y_2 = a\ \textit{sin}\ 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{d_2}{\lambda}\right).$

— *Sous l'action des deux sources* $y = y_1 + y_2$ *(les vibrations, verticales, sont donc de même direction), les amplitudes étant égales on se ramène à la somme de deux sinus :*

d'où $\quad y = 2a\ \textit{cos}\ \pi\dfrac{d_2 - d_1}{\lambda}\ \textit{sin}\ 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{d_1 + d_2}{2\lambda}\right).$

CORRIGÉ

● *Application numérique* $\dfrac{d_2 - d_1}{\lambda} = \dfrac{2 - 1{,}1}{0{,}4} = \dfrac{9}{4}$ $\dfrac{d_1 + d_2}{2\lambda} = \dfrac{3{,}1}{0{,}8} = \dfrac{31}{8}$

d'où $y = 2.10^{-3} \cos \dfrac{9\pi}{4} \sin\left(200\,\pi t - \dfrac{62\pi}{8}\right)$, *retirons* 2π *à la phase du cosinus, ajoutons* $4 \times 2\pi$ *c'est-à-dire* $\dfrac{64\pi}{8}$ *à la phase du sinus, ce qui ne change pas* y :

$$y = 2.10^{-3} \cos \frac{\pi}{4} \sin\left(200\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 1{,}41.10^{-3} \sin\left(200\pi t + \frac{\pi}{4}\right).$$

ÉNONCÉ

❷ Déterminer l'ensemble des points où l'amplitude est maximale. Combien y a-t-il de lignes d'amplitude maximale? Déterminer leurs points d'intersection avec la droite S_1S_2.

CORRIGÉ

● *Les deux sources vibrent en phase, l'amplitude en* M *est maximale lorsque* $d_2 - d_1 = k\lambda$ (k *entier). Cette relation définit une famille d'hyperboles de foyers* S_1 *et* S_2. *(Un point à amplitude maximale est aussi appelé un ventre d'élongation, un point à amplitude nulle est appelé un nœud d'élongation.)*

● *Cherchons comment se répartissent les sommets* A *des franges à amplitude maximale :*
A *étant entre* S_1 *et* S_2, $d_2 + d_1 = S_1S_2 = d$.
A *étant sur une ligne à amplitude maximale :* $d_2 - d_1 = k\lambda$, *on en déduit par addition*

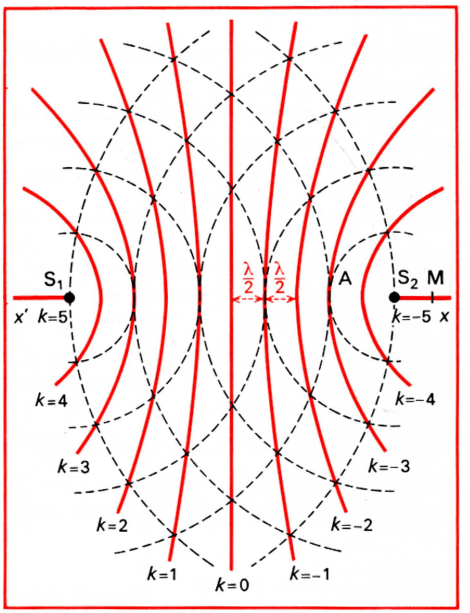
$$d_2 = \frac{d}{2} + k\frac{\lambda}{2} \qquad \textit{c'est-à-dire ici} \qquad d_2 = 10 + 2k \text{ (mm)}.$$

Il s'ensuit que :
— *deux sommets sont séparés de* $\lambda/2 = 2$ mm.
— *Le nombre de sommets, donc de franges, est limité :* d_2 *reste compris entre* 0 *et* 20 mm *d'où :* $0 \leqslant 10 + 2k \leqslant 20$
$-5 \leqslant k \leqslant 5$: *il y a donc* 11 *valeurs de* k, *donc 11 franges à amplitude maximale.*

● *Pour* $k = -5$ $d_2 = 0$, *la frange a pour sommet* S_2 : *c'est la demi-droite* S_2x *(pour cette frange* $d_2 - d_1 = -5\lambda$ *ce qui implique que* $MS_1 - MS_2 = 5\lambda = S_1S_2$).

● *Pour* $k = 0$ $d_2 = d_1$: *c'est la médiatrice de* S_1S_2.

● *Pour* $k = 5$ $d_2 = S_1S_2$, *la frange a pour sommet* S_1 : *c'est la demi-droite* S_1x'.



Remarque : si on veut construire les franges avec plus de précision on pourra tracer, ayant pour centre S_1 (et S_2), des cercles de rayon $k\lambda$, les points d'intersection de ces cercles sont tels que $d_2 - d_1$ soit un nombre entier de λ ce sont donc des points à amplitude maximale.

ÉNONCÉ

❸ Déterminer le lieu géométrique des points qui, à un instant donné t, sont à leur altitude maximale ou minimale. Comment se déforment, au cours du temps, les courbes constituant ce lieu? Comment peut-on observer ce mouvement?

CONSEIL

Ne pas confondre élongation et amplitude.

● *L'élongation* y *d'un point de la surface est maximale ou minimale lorsque*

$$\left|\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{d_1+d_2}{2\lambda}\right)\right|=1 \Longleftrightarrow 2\pi\frac{t}{T}-\pi\frac{d_1+d_2}{\lambda}=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad \text{d'où}$$

$$\frac{d_1+d_2}{\lambda}=\frac{2t}{T}-\frac{1}{2}-k \Longrightarrow d_1+d_2=2Vt-\frac{\lambda}{2}-k\lambda \quad (k \text{ entier})$$

CORRIGÉ

● *Cette relation définit une famille d'ellipses de foyers* S_1 *et* S_2. *Lorsque* t *augmente, pour chaque ellipse* $d_1 + d_2$ *croît, au cours du temps les ellipses se dilatent à partir du segment* S_1S_2. *Ce mouvement peut être observé, ralenti, en stroboscopant à une fréquence légèrement inférieure à celle de la vibration, c'est-à-dire inférieure à* 100 Hz.

Remarque : les intersections de ces ellipses avec les franges à amplitude maximale donnent alors les points les plus hauts ou les plus bas de la surface d'eau à l'instant *t*.

ÉNONCÉ

❹ Déterminer le lieu des points qui vibrent en phase avec les sources S_1 et S_2.

● **Remarque préliminaire** : les fonctions $y_1 = 5 \sin \omega t$; $y_2 = 4 \sin (\omega t + 2\pi)$ $y_3 = -6 \sin (\omega t + \pi)$ sont en phase.

● *L'équation horaire de* S_1 *(ou* S_2*) est* $y_{s_1} = a \sin 2\pi\frac{t}{T}$ *remarquons que* $a > 0$ *et que la phase initiale est nulle à* $2k\pi$ *près.*

L'équation horaire d'un point M *est* $y = 2a \cos \pi\frac{d_2-d_1}{\lambda} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{d_1+d_2}{2\lambda}\right)$

● M *vibre en phase avec* S_1 *(ou* S_2*) si :*

$-2\pi\frac{d_1+d_2}{2\lambda}=0+2k\pi$ *c'est-à-dire* $d_1+d_2=-2k\lambda$ *(nombre pair de* λ*) avec* $\cos\pi\frac{d_2-d_1}{\lambda}>0$.

$-2\pi\frac{d_1+d_2}{2\lambda}=\pi+2k\pi$ *c'est-à-dire* $d_1+d_2=-(2k+1)\lambda$ *(nombre impair) avec* $\cos\pi\frac{d_2-d_1}{\lambda}<0$.

CORRIGÉ

● *Construisons donc les ellipses* $d_1 + d_2 = k\lambda$, *comme* $d_1 + d_2 \geqslant S_1S_2$

$\Longrightarrow k\lambda \geqslant S_1S_2$

d'où $k \geqslant \frac{2}{0{,}4} \geqslant 5$.

1re ellipse : $k = 5$

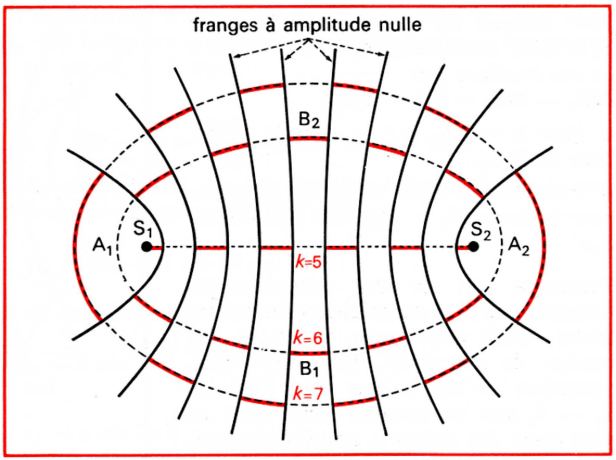
$d_1 + d_2 = 5\lambda = S_1S_2$, *cette ellipse est le segment* S_1S_2. k *étant impair il faut chercher les points de ce segment pour lesquels*

$\cos\pi\frac{d_2-d_1}{\lambda}<0$.

Pour le milieu de S_1S_2

$d_1 = d_2$

$\cos\pi\frac{d_2-d_1}{\lambda}=1>0$.



Le cosinus changeant de signe en s'annulant (c'est-à-dire quand on traverse les franges à amplitude nulle que nous avons dessinées) il s'en suit que les points des segments rouges de S_1S_2 *ont* $\cos\pi\frac{d_2-d_1}{\lambda}<0$, *par suite vibrent en phase avec* S_1 *ou* S_2.

2e ellipse : $k = 6$; $d_1 + d_2 = 2{,}4$ cm ($A_1A_2 = 2{,}4$ *cm, on déterminera* B_1 *et* B_2 *en portant* $S_1B_1 = S_2B_1 = 1{,}2$ cm). k *étant pair, il faut cette fois ne garder que les points ayant* $\cos \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} > 0$, *d'où les arcs d'ellipse rouges.*

CORRIGÉ

Remarque: : les points des arcs d'ellipse non rouges vibrent en opposition de phase avec les sources.

5 On utilise deux diapasons, vibrant à la même fréquence N = 100 Hz. La surface de l'eau est frappée aux mêmes points S_1 et S_2, S_2 est en quadrature avance sur S_1. Déterminer le lieu géométrique des points où l'amplitude est maximale, ainsi que ses intersections avec le segment S_1S_2. Que se passe-t-il si, à la suite d'un fonctionnement défectueux, le déphasage entre les diapasons varie plusieurs fois au cours d'une seconde?

ÉNONCÉ

Reprendre les équations horaires de S_1; de S_2 et d'un point M du milieu.

CONSEIL

- $y_{S_1} = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$ $\quad y_{S_2} = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \frac{\pi}{2}\right)$

On trouvera pour un point $M : y = 2a \cos\left(\pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_1 + d_2}{2\lambda}\right) + \frac{\pi}{4}\right]$

L'amplitude $A = 2a \left|\cos\left(\pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} - \frac{\pi}{4}\right)\right|$ *est maximale lorsque le cosinus est égal à* ± 1, *d'où* $\pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} - \frac{\pi}{4} = k\pi \Longrightarrow d_2 - d_1 = \frac{\lambda}{4} + k\lambda$ k *entier.*

On retrouve une famille d'hyperboles de foyers S_1 *et* S_2.

CORRIGÉ ABRÉGÉ

- *Pour les sommets* A *de ces hyperboles :* $d_1 + d_2 = S_1S_2 = d$ *et* $d_2 - d_1 = \frac{\lambda}{4} + k\lambda$, *ce qui conduit à* $d_2 = \frac{d}{2} + \frac{\lambda}{8} + k\frac{\lambda}{2}$, *si on compare au résultat de la* 2e *question, on s'apercoit que toutes les valeurs de* d_2 *pour les sommets sont augmentées de* $\frac{\lambda}{8}$ *: les sommets des hyperboles à amplitude maximale ont été décalés vers* S_1 *de* $\lambda/8$.

- *Si le déphasage se produit plusieurs fois par seconde de façon incohérente, il s'ensuit à chaque fois un décalage de la figure d'interférences qui ne peut donc plus être observée.*

6 Le diapason qui produit la vibration en S_1 a un mouvement vibratoire, parfaitement entretenu, de fréquence $N_1 = 99{,}9$ Hz. Le mouvement de S_2 n'a pas changé, les amplitudes sont égales.

ÉNONCÉ

a) Comment varie l'amplitude, au cours du temps, en un point de la surface de l'eau?

b) On considère un point P du segment S_1S_2 où l'amplitude est maximale, montrer que ce point se déplace au cours du temps, dans quel sens? avec quelle vitesse?

c) Quel est l'aspect de la surface de l'eau?

a) *Il se produit des battements, l'amplitude varie périodiquement avec une fréquence* $\nu = |N_2 - N_1| = 0{,}1$ Hz.

b) *Déterminons l'équation horaire du mouvement de* P :

CORRIGÉ

Si S_1 *vibrait seule* $y_1 = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T_1} - \frac{d_1}{\lambda_1}\right) = a \sin 2\pi\left(N_1 t - \frac{d_1}{\lambda_1}\right)$.

Si S_2 *vibrait seule* $y_2 = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T_2} - \frac{d_2}{\lambda_2}\right) = a \sin 2\pi\left(N_2 t - \frac{d_2}{\lambda_2}\right)$.
(On a supposé qu'à l'instant $t = 0$ *les deux sources étaient en phase.)*

Sous l'action de S_1 *et* S_2 :

$$y = 2a \cos \pi\left[(N_1 - N_2)\, t + \left(\frac{d_2}{\lambda_2} - \frac{d_1}{\lambda_1}\right)\right] \sin \pi\left[(N_1 + N_2)\, t - \left(\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}\right)\right].$$

Comme $N_1 \simeq N_2$; $\lambda_1 \simeq \lambda_2 \Longrightarrow N_1 + N_2 \simeq 2\, N_2$ *et on peut au dénominateur remplacer* λ_1 *par* λ_2, *d'où*

$$y \simeq 2\, a \cos \pi\left[(N_1 - N_2)t + \frac{d_2 - d_1}{\lambda_2}\right] \sin 2\pi\left[N_2\, t - \frac{d_1 + d_2}{2\,\lambda_2}\right].$$

- *L'amplitude de* P *est maximale pour* $\pi\left[(N_1 - N_2)\, t + \frac{d_2 - d_1}{\lambda_2}\right] = k\,\pi$,

ce qui implique que $d_2 - d_1 = k\lambda_2 + (N_2 - N_1)\ \lambda_2\ t$.

CORRIGÉ

Si nous comparons au résultat de la question 2, *nous voyons qu'il faut ajouter à* $d_2 - d_1$ *un terme fonction du temps* $(N_2 - N_1)\ \lambda_2\ t$.

- *Comme* P *est entre* S_1 *et* S_2, $d_2 + d_1 = S_1 S_2 = d$.

Par addition on en déduit $d_2 = \frac{d}{2} + k\,\frac{\lambda_2}{2} + \frac{(N_2 - N_1)}{2}\ \lambda_2\ t$.

A un instant donné, les points P *sont équidistants de* $\frac{\lambda_2}{2}$ *(faire varier* k*)*,

Pour un point P *donné (*k *fixé),* d_2 *est de la forme* $d_2 = K + v\ t$, K *constante.* v *étant la vitesse de déplacement de* P *vers* S_1 : $v = \frac{N_2 - N_1}{2}\ \lambda_2 = \frac{0{,}1}{2} \times 4 = 0{,}2$ cm/s.

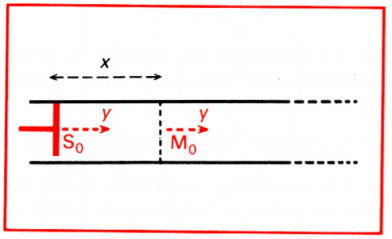
c) *Le déphasage* φ *entre les deux sources* S_1 *et* S_2 *augmente au cours du temps :* $\varphi = 2\,\pi\,(N_2 - N_1)\ t$. *Il en résulte d'après ce que l'on a vu au* ❺ *que les hyperboles d'amplitude maximale se déplacent de* S_2 *vers* S_1. *Ceci est confirmé par le résultat du* b). *On voit que ce mouvement est lent :* 0,2 cm/s.

---

n° 111.

ÉNONCÉ

A. ❶ Soit un tube (de grande longueur) contenant de l'air. L'air est mis en vibration par un piston S. Soit S_0 la position d'équilibre de ce piston, on repère sa position sur l'axe $\overrightarrow{S_0 y}$ orienté dans le sens de la propagation de l'onde progressive. L'amplitude de son mouvement sinusoïdal est $a = 1\ \mu$, sa fréquence 1 000 Hz. Quelle est l'équation de son mouvement? La vitesse du son dans l'air est V = 340 m/s.



CORRIGÉ

Choisissons l'instant $t = 0$ *pour l'instant d'un passage du piston par* S_0 *dans le sens positif de* $\overrightarrow{S_0 y}$, *dans ce cas* $y_s = \overline{S_0 S} = a \sin 2\,\pi\,Nt = \sin 2\,000\,\pi\,t$ (μ).

ÉNONCÉ

❷ Soit une tranche de gaz M ayant pour position d'équilibre M_0. On posera $\overline{S_0 M_0} = x$ mesurée positivement dans le sens de la propagation. Les mouvements de tous les points de M sont-ils identiques? Précisez.

CORRIGÉ

• *Le piston* S *communique à tous les points des tranches d'air, qui lui sont parallèles, le même mouvement : on dit que c'est une* onde progressive plane *qui se propage.*

• *L'élongation* $\overline{M_0M} = y$ *à l'instant* t *est celle qu'avait* S *à l'instant* $t - \frac{x}{V}$, *d'où*

$$y = \sin 2\,000\ \pi\left(t - \frac{x}{V}\right) = \sin\left(2\,000\ \pi t - \frac{2\,000\ \pi x}{340}\right) = \sin\left(2\,000\ \pi t - \frac{100\ \pi x}{17}\right),$$

y *étant en microns et* x *en mètres.*

ÉNONCÉ

❸ Le piston S fait varier la pression au voisinage immédiat de S_0 suivant l'équation $p\text{-}p_0 = p_m \cos 2\pi N t$;
$p\text{-}p_0$: variation de pression;
p_0 pression de l'air du tube au repos;
p_m amplitude de la variation de pression. On donne $p_m = 2{,}5$ Pa. Comment varie la pression autour de M_0. Comparer $p\text{-}p_0$ et y.

CORRIGÉ

• *La variation de pression en* M_0, *à l'instant* t *est celle qui existait en* S_0 *à l'instant* $t - \frac{x}{V}$

d'où $p - p_0 = 2{,}5 \cos 2\,000\ \pi\left(t - \frac{x}{V}\right) = 2{,}5 \cos\left(2\,000\ \pi t - \frac{100\ \pi x}{17}\right)$ *(pascals).*

• $p - p_0 = 2{,}5 \sin\left(2\,000\ \pi t - \frac{100\ \pi x}{17} + \frac{\pi}{2}\right)$ *puisque* $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$; y *et* $(p - p_0)$ *sont donc en quadrature.*

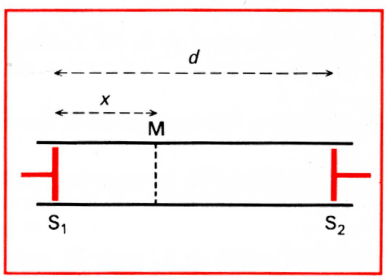
ÉNONCÉ

B. Aux extrémités d'un tube de longueur d on dispose deux petits pistons S_1 et S_2 vibrant sinusoïdalement à la même fréquence, chaque piston a un mouvement d'amplitude a et crée une variation de pression d'amplitude p_m.

❶ Les deux sources sonores S_1 et S_2 sont en phase. Soit M une tranche d'air située à x mètres de S_1, comment varie la pression de l'air autour de M? Pour quelles valeurs de x la pression est-elle constante (nœud de pression)?
Pour quelles valeurs de x la variation de pression est-elle maximale (ventre de pression)?

CONSEIL

Deux sources sonores vibrent en phase si les variations de pression qu'elles imposent sont en phase.



CORRIGÉ

• *Les deux sources étant en phase,* S_1 *impose une variation de pression* $(p - p_0)_{s_1} = p_m \cos 2\pi Nt$.
De même pour S_2 : $(p - p_0)_{s_2} = p_m \cos 2\pi Nt$.

• *Sous l'action de* S_1, *s'impose en* M

$$(p - p_0)_1 = p_m \cos 2\pi\left(Nt - \frac{x}{\lambda}\right).$$

• *Sous l'action de* S_2 *s'impose en* M

$$(p - p_0)_2 = p_m \cos 2\pi\left[Nt - \frac{(d-x)}{\lambda}\right].$$

• *Sous l'action de* S_1 *et de* S_2 *la variation de pression en* M *est la somme des variations de pression (ce résultat est absolument général : il y a toujours addition algébrique des variations de pression), d'où, comme* $\cos p + \cos q = 2 \cos\frac{p-q}{2} \cos\frac{p+q}{2}$

$$(p - p_0) = (p - p_0)_1 + (p - p_0)_2 = 2\,p_m \cos\pi\left(\frac{d - 2x}{\lambda}\right) \cos\left(2\pi Nt - \frac{\pi d}{\lambda}\right).$$

● *L'amplitude de la variation de pression est donc* $P = 2\ p_m \left| \cos \frac{\pi(d - 2x)}{\lambda} \right|$. *Lorsque* P *est nulle le point correspondant s'appelle un nœud de pression* ($p - p_0$ *est constamment nul, c'est-à-dire que la pression* $p = p_0$). *Cherchons la répartition des nœuds de pression :*

$$\cos \pi\left(\frac{d - 2x}{\lambda}\right) = 0 \implies \pi \frac{d - 2x}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

d'où

$$d - 2x = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \implies x = \frac{d}{2} - (2k + 1)\frac{\lambda}{4}.$$

CORRIGÉ

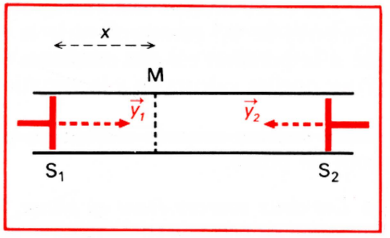
Les nœuds de pression sont équidistants de $\frac{\lambda}{2}$ *les uns des autres (en effet si* k *varie de une unité* x *varie de* $\frac{\lambda}{2}$).

● *L'amplitude de la variation de pression* P *est maximale pour* $\cos \pi\left(\frac{d - 2x}{\lambda}\right) = \pm 1$, *d'où* $\pi\left(\frac{d - 2x}{\lambda}\right) = k\pi \implies d - 2x = k\lambda \implies x = \frac{d}{2} - k\frac{\lambda}{2}$. *Ces points, appelés ventres de pression, sont équidistants de* $\frac{\lambda}{2}$, *en particulier le milieu de* S_1S_2 *est un ventre de pression* ($k = 0$).

ÉNONCÉ

❷ Comment varie l'élongation de la tranche d'air M en fonction de x et de t? Pour quelles valeurs de x l'élongation est-elle constamment nulle (nœud d'élongation)?

● *Les deux sources* S_1 *et* S_2 *sont en phase c'est-à-dire qu'elles imposent des variations de pression en phase en* S_1 *et* S_2. *Il s'ensuit qu'elles doivent exciter la colonne gazeuse de la même façon : lorsque* S_1 *se déplace dans le sens positif de* $\overrightarrow{Y_1}$. S_2 *se déplace dans le sens positif de* $\overrightarrow{Y_2}$. *Si on mesure algébriquement l'élongation de* S_1 *sur* $\overrightarrow{Y_1}$ *et l'élongation de* S_2 *sur* $\overrightarrow{Y_2}$, *on doit donc avoir à chaque instant* $y_{S_1} = y_{S_2} =$ a *sin* 2 π Nt.



CORRIGÉ

● *Mesurons l'élongation de la tranche d'air* M *algébriquement* sur l'axe $\overrightarrow{Y_1}$.

— *sous l'action de* S_1 *seule* M *prend l'élongation* $y_1 = a \sin 2\pi\left(Nt - \frac{x}{\lambda}\right)$.

— *sous l'action de* S_2 *seule* M *prend l'élongation* $y_2 = a \sin 2\pi\left[Nt - \frac{(d - x)}{\lambda}\right]$ *mesurée sur* $\overrightarrow{Y_2}$, *c'est-à-dire* $y_2' = -a \sin 2\pi\left[Nt - \frac{(d - x)}{\lambda}\right]$ *mesurée sur* $\overrightarrow{Y_1}$.

— *sous l'action des deux sources* M *prend l'élongation* $y = y_1 + y_2'$ *c'est-à-dire*

$$y = 2a \sin \pi\left(\frac{d - 2x}{\lambda}\right) \cos\left(2\pi Nt - \frac{\pi d}{\lambda}\right).$$

● *Pour les nœuds d'élongation* N_e

$$\sin\ \pi\left(\frac{d-2x}{\lambda}\right)=0 \Longrightarrow \pi\left(\frac{d-2x}{\lambda}\right)=k\ \pi \Longrightarrow x=\frac{d}{2}-k\,\frac{\lambda}{2}.$$

CORRIGÉ

En comparant aux résultats de la question précédente on conclut : les ventres de pression V_P *sont des nœuds d'élongation* N_e, *de même les nœuds de pression* N_P *sont des ventres d'élongation* V_e.

REMARQUE

Le résultat précédent est valable quand deux ondes progressives, planes, longitudinales, se superposent en se propageant dans la même direction en sens contraire.
Alors $N_e \Longleftrightarrow V_P$ et $N_P \Longleftrightarrow V_e$.

---

n° 112. Dans l'exercice précédent nous avons étudié des sources d'ondes longitudinales planes. Etudions maintenant des sources sonores ponctuelles émettant des ondes sphériques. Ces sources peuvent être considérées comme des petits ballons qu'on gonflerait ou dégonflerait rapidement (on les appelle souvent des sphères pulsantes). Ces sources émettent des ondes de variation de pression dont on négligera l'amortissement. La vitesse du son dans l'air est $V = 340$ m/s.

ÉNONCÉ

❶ Soient deux sources S_1 et S_2 vibrant en phase à la fréquence $N = 500$ Hz située à $S_1S_2 = 2$ m l'une de l'autre. L'amplitude de la variation de pression est 5 pascals. L'oreille étant sensible à la pression, sur quelles surfaces peut-on la déplacer pour qu'elle détecte un son maximum ? Déterminer les points d'intersection de ces surfaces avec S_1S_2.

● *Les deux sources étant en phase imposent en* S_1 *et* S_2 *des variations de pression en phase :*

$$(p-p_0)_{S_1}=(p-p_0)_{S_2}=p_m\ \cos\ 2\ \pi\ Nt.$$

● *Un point* M *situé à* d_1 *de* S_1 *et* d_2 *de* S_2 *est soumis à* $(p-p_0)_1=p_m\ \cos\ 2\ \pi\left(Nt-\frac{d_1}{\lambda}\right)$ *et à* $(p-p_0)_2=p_m\ \cos\ 2\ \pi\left(Nt-\frac{d_2}{\lambda}\right)$ *c'est-à-dire à la somme* $(p-p_0)=(p-p_0)_1+(p-p_0)_2$ *ce qui conduit à* $p-p_0=2\ p_m\ \cos\ \pi\ \frac{d_2-d_1}{\lambda}\ \cos\left(2\ \pi\ Nt-\pi\ \frac{d_1+d_2}{\lambda}\right)$.

● *L'amplitude de variation de pression de* $P=2\,p_m\left|\cos\ \pi\ \frac{d_2-d_1}{\lambda}\right|=10\left|\cos\ \pi\ \frac{d_2-d_1}{\lambda}\right|$.

CORRIGÉ

Elle est maximale pour $\cos\ \pi\ \frac{d_2-d_1}{\lambda}=\pm 1$; $\pi\ \frac{d_2-d_1}{\lambda}=k\pi$; $d_2-d_1=k\ \lambda$. *Pour chaque valeur de* k *cette relation définit une surface qui est une nappe d'hyperboloïde. de foyers* S_1 *et* S_2, *admettant la droite* S_1S_2 *comme axe de symétrie de révolution. Ces surfaces sont appelées surfaces ventrales de variation de pression.*

● *Les points d'intersection de ces surfaces avec* S_1S_2 *sont tels que :*

$$\begin{cases} d_2-d_1=k\ \lambda & (1) \quad k\in Z \\ d_2+d_1=S_1S_2 & (2) \end{cases}$$

Dans cette expérience $\lambda=\frac{V}{N}=\frac{340}{500}=0{,}68$ m; $S_1S_2=2$ m, *en faisant la demi-somme de* (1) *et* (2) *on en déduit* $d_2=\frac{S_1S_2}{2}+k\,\frac{\lambda}{2}$.

1re conséquence : *lorsque* k *varie d'une unité* d_2 *varie de* $\frac{\lambda}{2} = 0{,}34\ m$ *: les points sont équidistants de* 34 cm *sur* $S_1\ S_2$.

CORRIGÉ

2e conséquence : comme $0 \leqslant d_2 \leqslant 2$ m $\qquad 0 \leqslant \frac{S_1 S_2}{2} + \frac{k\lambda}{2} \leqslant 2$

d'où $\frac{-2}{0{,}68} < k < \frac{2}{0{,}68}$; $-2{,}9 < k < 2{,}9 \Longrightarrow k \in \{-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\}$: *il y a donc cinq points d'intersection avec* $S_1\ S_2$ *c'est-à-dire cinq nappes d'hyperboloïde (dont le plan médiateur de* $S_1\ S_2$*).*

REMARQUE

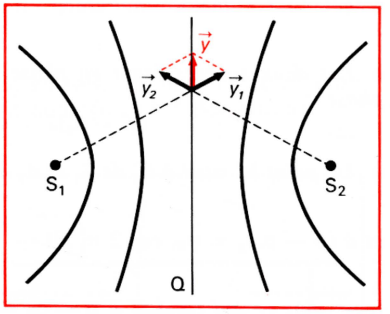
* Les surfaces précédentes représentent l'ensemble des ventres de pression. On trouverait de même, des surfaces s'intercalant entre les précédentes représentant l'ensemble des nœuds de pression (surfaces nodales de variation de pression).
* Il est intéressant de remarquer que l'étude des élongations est très difficile puisqu'il faut faire une composition géométrique de $\vec{y_1}$ et $\vec{y_2}$. On montre qu'il n'existe pas de surface à amplitude d'élongation, nulle (ou maximale) au voisinage des sources.
Au voisinage immédiat du segment S_1S_2, à l'exclusion des sources, on peut considérer que les ondes sont planes, on peut alors dire que sur S_1S_2 il y a des nœuds d'élongation aux ventres de pression et des ventres d'élongation aux nœuds de pression. Ce résultat n'étant plus du tout valable pour l'ensemble du champ d'interférences.

ÉNONCÉ

❷ Montrer que les vecteurs élongation $\vec{y}$ des points du plan médiateur Q de $S_1\ S_2$ sont parallèles à ce plan.

CORRIGÉ

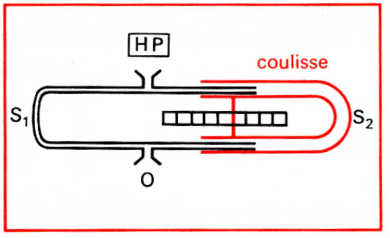
● *Soit* M *un point du plan médiateur* Q *de* $S_1 S_2$. *Les vecteurs élongation* $\vec{y_1}$ *et* $\vec{y_2}$ *sont à chaque instant symétriques par rapport à* Q, *leur résultante est donc contenue dans le plan* Q.



● *Les molécules d'air glissent donc sur le plan* Q, *on ne change rien à leurs vibrations si on place sur* Q *une plaque plane rigide (écran métallique par exemple).*
Cette plaque étant mise si on retire la source S_2, *le phénomène d'interférences du côté de* S_1 *n'est pas modifié : nous en déduisons donc que lorsque des ondes sphériques de variation de pression se réfléchissent sur un obstacle rigide plan (mur...), on peut remplacer l'obstacle par une source fictive symétrique de la source réelle par rapport à l'obstacle. Si l'obstacle est rigide c'est une surface ventrale de variation de pression : la source fictive est en phase avec la source réelle. Au contraire si l'obstacle est une zone de pression constante (Ex. la surface de séparation d'un liquide, les ondes provenant du liquide), la source fictive est en opposition de phase avec la source réelle.*

ÉNONCÉ

n° **113.** Un haut-parleur (HP), émet un son qui est canalisé suivant deux trajets S_1 et S_2 dans un trombone de Kœnig. Un observateur écoute en O.



❶ Quelle relation doivent vérifier les longueurs l_1 et l_2 des trajets si l'on veut obtenir le maximum d'intensité sonore en O?
On admettra que l'oreille est sensible aux variations de pression.

Les variations sinusoïdales de la pression se propagent, puis interfèrent en O, *l'amplitude de variation de pression résultante est maximale si elles arrivent en phase en* O. *Si nous supposons que la vitesse de propagation est la même pour chaque trajet* S_1 *et* S_2, *les variations de pression étant en phase au départ, elles seront en phase en* O *si* $l_2 - l_1 = k\lambda$ k *entier. Il y a alors en* O *un ventre de pression.*

CORRIGÉ

2 La vitesse de propagation du son dans l'air à 20 °C est 340 m/s. Lorsqu'il tire la coulisse, l'observateur perçoit des maxima d'intensité sonore quand l'index est aux traits 1 cm, 31 cm, 61 cm d'une règle graduée. Quelle est la fréquence du son émis par le haut-parleur?

ÉNONCÉ

- *Lorsque la coulisse est tirée d'une longueur* d, *le trajet* S_2 *est allongé de* d *dans chaque branche, de* 2 d *au total. D'un maximum à l'autre* $d = 30$ cm.
- *Pour le premier maximum soient* l_1 *et* l_2 *les longueurs de trajets,* $l_2 - l_1 = k\lambda$.
- *Pour le second maximum* $(l_2 + 2d) - l_1 = (k + 1)\lambda \Longrightarrow \lambda = 2d = 60$ cm.
- *Comme* $\lambda = VT = \dfrac{V}{N} \Longrightarrow N = \dfrac{V}{\lambda} = \dfrac{340}{0{,}6} = 566$ Hz.

CORRIGÉ

3 Si l'on remplaçait l'air par de l'azote, à la même température, de combien faudrait-il tirer la coulisse pour obtenir deux maxima d'intensité sonore consécutifs? N = 14.

ÉNONCÉ

L'azote est diatomique, l'air est pratiquement un mélange de gaz diatomiques; les températures sont les mêmes donc $\dfrac{V_2}{V_1} = \sqrt{\dfrac{d_1}{d_2}}$ $\quad V_1 = 340$ m/s $\quad d_1 = 1 \quad d_2 = \dfrac{28}{29}$

Comme la fréquence ne change pas $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{\dfrac{29}{28}} \Longrightarrow \lambda_2 = 0{,}6\sqrt{\dfrac{29}{28}} = 0{,}61$ m

Il faut donc tirer la coulisse de $\dfrac{\lambda_2}{2} = 0{,}305$ m $= 30{,}5$ cm.

CORRIGÉ

4 La position de l'index est déterminée à 1 mm près. Dans quelles limites peut varier la température sans que cela modifie la mise au point sonore de façon appréciable?

ÉNONCÉ

La vitesse du son est proportionnelle à la racine carrée de la température absolue du gaz $V = K\sqrt{T}$ K *constante pour le gaz donné.*
La longueur du déplacement d *est donné par*

$$d = \frac{\lambda}{2} = \frac{V}{2N} = \frac{K\sqrt{T}}{2N}$$

Quand la température varie de ΔT, d *varie de* Δd *tel que* $\dfrac{\Delta d}{d} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta T}{T}$

Tant que $\Delta d \leqslant 1$ mm, *la variation de température est imperceptible, par suite* $\Delta T \leqslant 2\dfrac{T}{d}\Delta d$

avec $\Delta d = 1$ mm, $T = 293$ °K, $d = 30$ cm (*ou* 30,5 cm) *pour l'air (ou l'azote) on trouve alors* $\Delta T \leqslant 2$ °K *c'est-à-dire que la température doit être définie à* 2 °C *près.*

CORRIGÉ

5 On entoure la partie S_1 d'une résistance électrique qui permet de porter l'air contenu dans S_1 à la température T_1 °K, la longueur du trajet S_1 est $\ell_1 = 2$ m. La partie S_2 est à 20 ° C, la longueur du trajet S_2 est $\ell_2 = 2$ m. Quelle est la valeur minimale de T_1 donnant une extinction du son en O?

ÉNONCÉ

● *Les variations de pression partent du haut-parleur en phase, par le trajet* S_1 *l'onde progressive met* $t_1 = \frac{\ell_1}{V_1}$ (V_1 *vitesse du son à* T_1 °K) *pour arriver en* O; *l'autre onde progressive met* $t_2 = \frac{\ell_2}{V_2}$ (V_2 *vitesse à* 20 °C $V_2 = 340$ m/s) *pour arriver en* O, *comme* $V_1 > V_2$; $t_1 < t_2$, *lorsque* $t_2 - t_1 = \frac{T}{2} + kT$ *les variations de pression arrivent en* O *en opposition de phase : l'oreille ne détecte alors aucun son (nœud de pression).*

CORRIGÉ

● *La fréquence étant* $N = 566$ Hz; $T = \frac{1}{566}$ s *d'où*, k *étant un entier positif,*

$$\frac{\ell_2}{V_2} - \frac{\ell_1}{V_1} = \frac{T}{2} + kT \Longrightarrow \frac{2}{340} - \frac{2}{V_1} = \frac{1}{1132} + kT$$

d'où $\frac{2}{V_1} = \frac{2}{340} - \frac{1}{1132} - kT$, V_1 *est minimal quand* $\frac{2}{V_1}$ *est maximal donc pour* $k = 0$ *ce qui correspond à la température minimale* $T_1 \Longrightarrow \frac{2}{V_1} = \frac{2264 - 340}{340 \times 1132} \Longrightarrow V_1 = 400$ m/s

$$\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \Longrightarrow \frac{400}{340} = \sqrt{\frac{T_1}{293}} \Longrightarrow T_1 = 293 \left(\frac{400}{340}\right)^2 = 405 \text{ °K} = 132 \text{ °C}$$

Ondes stationnaires - Résonance

Pb 34
Pb 35

Conseils généraux

— Voir le tableau récapitulatif (Physique, page 165).
— Le régime stationnaire, le plus simple, satisfaisant aux conditions de résonance est dit fondamental.
— Pour les ondes transversales stationnaires quand on parle des nœuds il s'agit tacitement des nœuds d'élongation.
— Pour les ondes longitudinales, planes, stationnaires il importe de bien préciser s'il s'agit de nœud d'élongation (encore appelés de vibration) ou de nœud de pression.

---

n° 114.

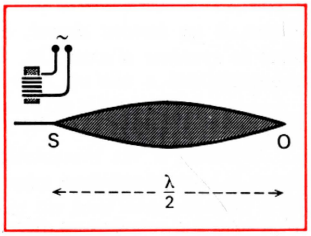
ÉNONCÉ

❶ Un vibreur de fréquence N = 100 Hz, produit sur corde de longueur l = 1 m, des ondes stationnaires transversales avec un nœud à chaque extrémité (il n'y en a pas d'autres). La corde est soumise à la tension F = 400 N. Quel est l'aspect de la corde? Evaluer sa masse.

CORRIGÉ

On observe donc un fuseau, la longueur de la corde l *est donc égale à une demi-longueur d'onde :*

$$l = \lambda/2 \Longrightarrow \lambda = 2l = 2 \text{ m}.$$



La célérité V des ébranlements transversaux se propageant sur cette corde est telle que

$$\lambda = VT = \frac{V}{N} \Longrightarrow V = \lambda N = 2 \times 100 = 200 \text{ m/s}.$$

Soit μ *la masse linéique :*

$$V = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Longrightarrow \mu = \frac{F}{V^2} = \frac{400}{(200)^2} = 10^{-2} \text{ kg/m},$$

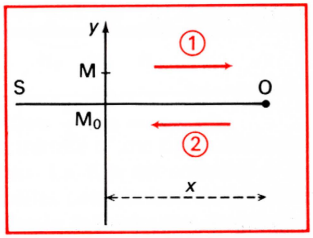
la masse de la corde $m = \mu l = 10^{-2}$ kg = 10 g.

ÉNONCÉ

❷ La largeur maximale du fuseau est de 4 mm. Ecrire l'équation horaire du mouvement d'un point M de la corde, situé à la distance x de l'extrémité fixe O. On ne tiendra compte que de la première réflexion sur cette extrémité, O.
Application numérique x = 25 cm.

CORRIGÉ

• *Comptons les élongations à partir des positions d'équilibre. Le point fixe* O *doit rester immobile sous l'action de l'onde incidente et de l'onde réfléchie.*



— *S'il n'y avait que l'incidente* ❶ *l'élongation de* O *serait, par un choix convenable des temps,*

$$y_{0,1} = a \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

— *S'il n'y avait que la réfléchie* ❷ *l'élongation de* O *serait* $y_{0,2} = -a \sin \frac{2\pi t}{T}$.

● *En* M, *situé à* x *de* O y_1, *en avance sur* $y_{0,1}$ *est* $y_1 = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$. y_2 *en retard sur* $y_{0,2}$, *est* $y_2 = -a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$. *D'après le principe de la superposition des petits mouvements* $y = y_1 + y_2 = 2a \sin 2\pi\frac{x}{\lambda} \cos 2\pi\frac{t}{T}$.

● *Application numérique*

— *Pour le milieu de la corde* x = 0,5 m, *l'amplitude*

CORRIGÉ

$$\left| 2a \sin 2\pi\frac{x}{\lambda} \right| = 2a \sin\left(\frac{2\pi \times 0{,}5}{2}\right) = 2a,$$

le point oscille donc sur un segment de longueur 4 a, *d'après l'énoncé* 4 a = 4 mm; a = 1 mm.

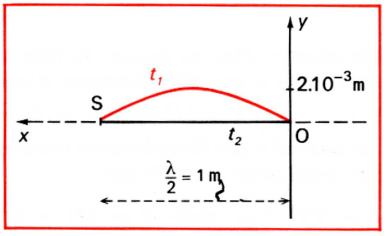
— *Pour le point* M *tel que* x = 0,25 m $y = 2.10^{-3} \sin\left(2\pi\frac{0{,}25}{2}\right) \cos 200\,\pi t$ *d'où* $y = 1{,}41.10^{-3} \cos 200\,\pi t$ (m).

ÉNONCÉ

❸ Quelle est la forme de la corde à un instant t donné?
Application numérique: $t_1 = 0$; $t_2 = 2{,}5.10^{-3}$s.

CORRIGÉ

● *La relation* $y = 2a \sin 2\pi\frac{x}{\lambda} \cos 2\pi\frac{t}{T}$ *nous donne, à un instant donné, la forme de la corde dans le système d'axes* Ox, Oy : *c'est un arc de sinusoïde.*



En particulier pour $t_1 = 0$; $y = 2.10^{-3} \sin 2\pi\frac{x}{2}$,

pour $t_2 = 2{,}5.10^{-3}$ s; $\cos 2\pi\frac{t}{T} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

d'où y = 0 : *pendant ce quart de période la corde s'est aplatie sur sa position d'équilibre.*

ÉNONCÉ

❹ En déduire, à quelles distances de O le fuseau a t-il pour largeur 2 mm?

● *A l'instant* t = 0 *(plus généralement aux instants* t = kT*) la corde passe par sa position la plus haute, l'équation du bord supérieur du fuseau est donc* $y = 2.10^{-3} \sin 2\pi\frac{x}{2}$. *Cherchons pour quelles valeurs de* x, y *est égale à* 1 mm (*ce qui correspond bien à une largeur de fuseau de* 2 × 1 mm = 2 mm)

● $10^{-3} = 2.10^{-3} \sin 2\pi\frac{x}{2} \Longrightarrow \sin \pi x = \frac{1}{2}$ *posons* $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, *dans ce cas*

CORRIGÉ

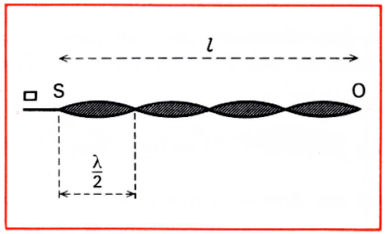
$$\sin \pi x = \sin\frac{\pi}{6} \Longrightarrow \begin{cases} \pi x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi & \Longrightarrow x = \frac{1}{6} + 2k \\ \text{ou bien} \\ \pi x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Longrightarrow x = \frac{5}{6} + 2k. \end{cases}$$

Comme $x \in [0; 1\text{ m}]$ *il y a donc deux solutions* $x = \frac{1}{6}$ m *et* $x = \frac{5}{6}$ m.

Remarque : Dans $x = 1/6 + 2k$ le 2 représente la longueur d'onde λ : $x = 1/6 + k\lambda$.

5 Quelles valeurs faut-il donner à la tension F pour observer k fuseaux ? Application numérique : $k = 4$.

ÉNONCÉ



CORRIGÉ

- *Dans ce cas la longueur de la corde* $l = k\,\lambda/2$
- $\lambda = VT = \dfrac{V}{N} = \dfrac{1}{N}\sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$

comme $\lambda = \dfrac{2l}{k}$ *on en déduit*

$$\frac{2l}{k} = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \Longrightarrow F = \frac{4l^2N^2\mu}{k^2},$$

lorsque $k = 1$; $F = 4l^2N^2\mu = 400$ N (1re *question*)

d'où $F = \dfrac{400}{k^2}$ (N) : *il faut diviser la tension par* k^2 *pour multiplier le nombre de fuseaux par* k. *En particulier pour* $k = 4$; $F = \dfrac{400}{16} = 25$ N.

---

n° 115.

1 On a réparti uniformément de la poudre de liège dans un tube de verre horizontal. A l'une des extrémités un haut-parleur émet un son de fréquence $N = 3\,400$ Hz. L'autre extrémité est fermée par un piston P que l'on peut faire coulisser à l'intérieur du tube. On constate que la poudre sautille et se rassemble en tas régulièrement espacés. Expliquer pourquoi. Déterminer la distance séparant le centre de deux tas successifs. La vitesse du son dans l'air du tube est $V = 340$ m/s.

ÉNONCÉ

La poudre est expulsée des zones où l'air vibre, c'est-à-dire qu'elle a tendance à se rassembler aux nœuds d'élongation N_e (encore appelés nœuds de vibration).

CONSEIL

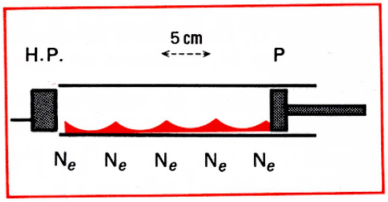
Les ondes sonores planes, émises par le haut-parleur se réfléchissent sur le piston P. *Les ondes incidentes et réfléchies interfèrent, produisant des ondes stationnaires. La poudre expulsée des ventres de vibration se rassemble aux nœuds. Les tas sont donc distants d'une demi-longueur d'onde. Comme* $\lambda = VT = \dfrac{V}{N} = \dfrac{340}{3\,400} = 0{,}1$ m, *l'équidistance entre deux tas successifs est* 5 cm.

CORRIGÉ

2 Montrer que le phénomène sera particulièrement net pour certaines positions du piston P. On admettra qu'il s'établit alors un nœud de vibration au niveau du haut-parleur.

ÉNONCÉ

Les piston est un obstacle fixe, déterminant également un nœud de vibration N_e. *L'établissement d'un système d'ondes stationnaires stable suppose donc que la distance du piston au haut-parleur égale un multiple entier de demi-longueur d'onde. La colonne d'air dans le tube est alors en résonance.*



CORRIGÉ

3 Le haut-parleur est remplacé par un piston P′, fixé à l'extrémité d'une tige métallique, de longueur $l' = 100$ cm, serrée en son milieu par un étau. La tige est soumise à des tractions qui provoquent des ondes stationnaires longitudinales comportant uniquement un ventre de vibration à chaque extrémité. On observe dans le tube des tas de poudre, la distance séparant le 1er du 6e est de 35 cm. Déterminer la vitesse du son dans le métal de la tige.

ÉNONCÉ

CONSEIL

La fréquence de la vibration sonore ne dépend pas du milieu de propagation : elle est la même dans le métal de la tige et dans l'air du tube.

CORRIGÉ

● *Les vibrations longitudinales qui se propagent dans la tige et dans l'air du tube ont la même période* T : *c'est la période du mouvement de* P'.

● *Soit* V' *la vitesse du son dans la tige, la longueur d'onde dans la tige est* $\lambda' = V'T$. *La longueur* l' *de la tige égale* $\frac{\lambda'}{2}$ *(entre deux ventres de vibrations successifs la distance est une demi-longueur d'onde), d'où* $\lambda' = 2l' = 2$ m, *par suite,* $V'T = 2$ (1)

● *Dans l'air du tube* $\lambda = VT$, *entre le* 1er *et le* 6e *tas la distance est*

$$5\frac{\lambda}{2}, \quad d'où \quad \frac{5\lambda}{2} = 0{,}35 \Longrightarrow \lambda = 0{,}14 \text{ m}, \quad d'où \quad VT = 0{,}14 \qquad (2)$$

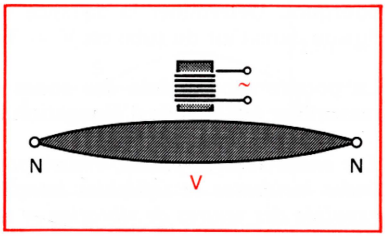
● *Eliminons* T, *en divisant* (1) *par* (2) : $\frac{V'}{V} = \frac{2}{0{,}14} \Longrightarrow V' = \frac{340 \times 2}{0{,}14} \simeq 4860$ m/s.

---

n° 116.

ÉNONCÉ

❶ Un fil d'acier de masse $m = 2{,}5$ g, de longueur $\ell = 1$ m est soumis à une tension F. Il subit l'action d'un électro-aimant alimenté par un courant alternatif de fréquence $N = 50$ Hz. Pour une valeur convenable de F, le fil vibre, dessinant un fuseau. Evaluer F.



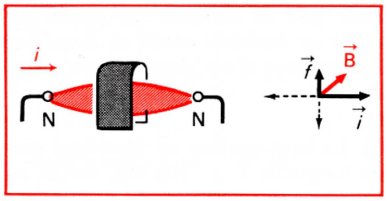
CORRIGÉ

● *A chaque alternance du courant le fil est attiré par l'électro-aimant (l'acier étant attiré aussi bien par le pôle Nord d'un aimant que par le pôle Sud) : le fil accomplit donc une oscillation complète par alternance du courant. Il vibre donc à la fréquence* $N' = 2N = 100$ Hz.

● *La corde a un nœud à chaque extrémité donc* $\ell = \frac{\lambda}{2}$. *Comme* $\lambda = \frac{V}{N}$ *avec* $V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ *et* $\mu = \frac{m}{\ell}$, *on en déduit* $2\ell = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{F\ell}{m}} \Longrightarrow F = 4\ell N^2 m = 100$ N.

ÉNONCÉ

❷ Le fil d'acier est remplacé par un fil de cuivre de masse $m = 2{,}5$ g, de longueur $\ell = 1$ m, tendu par une force $F = 25$ N. Il subit l'action du champ magnétique, horizontal, d'un aimant en U. Le fil entre en résonance lorsqu'il est parcouru par un courant alternatif de fréquence N, dessinant un fuseau. Déterminer le plan de vibration et la fréquence du courant.



CORRIGÉ

● *A chaque instant le fil est soumis à une force électromagnétique* $\vec{f}$ *telle que* $\begin{cases} \vec{f} \perp \vec{B} \\ \vec{f} \perp \text{fil} \end{cases}$

Par suite $\vec{f}$ *est une force verticale qui change de sens en même temps que le courant. La fréquence de vibration du fil est donc égale à celle du courant.*

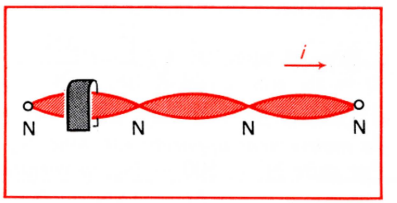
● *Comme dans la question* ❶ $\lambda = 2\ell = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{F\ell}{m}} \Longrightarrow N = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{F\ell}{m}} = 50$ Hz.

ÉNONCÉ

❸ L'aimant est placé au 1/6 du fil à partir d'une extrémité, on observe une résonance de moindre amplitude, avec trois fuseaux. Montrer que l'on met ainsi en évidence un harmonique du courant, lequel ?

CORRIGÉ

● *Le courant* i *présente une composante de fréquence* N′, *qui produit dans le fil des ondes stationnaires de même fréquence.*



● *Cette fois* $\ell = 3\frac{\lambda'}{2} \Longrightarrow \lambda' = \frac{2\ell}{3}$ *alors que dans la* 2e *question* $\lambda = 2l$, *par suite* $\lambda' = \frac{\lambda}{3}$, *comme la vitesse de propagation n'a pas changé*

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{VT'}{VT} = \frac{T'}{T} = \frac{N}{N'} = \frac{1}{3} \Longrightarrow N' = 3N.$$

Il s'agit donc de l'harmonique 3.

---

n° 117.

ÉNONCÉ

❶ Une corde à piano est tendue par une force $\vec{F}$ entre deux points A et B, tels que AB = d = 0,8 m. On supposera dans tout le problème d invariable. La masse linéique $\mu = 3{,}125.10^{-3}$ kg/m lorsque la tension est F = 500 N.
Quelle est la fréquence N du son complexe émis par cette corde à la suite d'un choc ? Quelles sont les fréquences des composantes sinusoïdales de ce son ?

CORRIGÉ

● *La corde est le siège d'ondes stationnaires transversales, présentant un nœud d'élongation à chaque extrémité :* $d = k\frac{\lambda}{2}$ *d'où* $\lambda = \frac{2d}{k}$ $k \in \mathbb{N}^*$.

● *Comme* $\lambda = \frac{V}{N}$ *avec* $V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, *on en déduit* $\frac{2d}{k} = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ *d'où* $N = \frac{k}{2d}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$.

● *La corde émet donc un son complexe composé du fondamental de fréquence*

$$N_1 = \frac{1}{2d}\sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{1}{2 \times 0{,}8}\sqrt{\frac{500}{3{,}125 \cdot 10^{-3}}} = 250 \text{ Hz};$$

et des harmoniques de fréquence kN_1 (k *entier* $\geqslant 2$)

ÉNONCÉ

❷ On stroboscope à la fréquence N_e = 250 Hz. Dans cette question et la suivante on négligera les harmoniques. *a*) Quel est l'aspect de la corde ? *b*) On quadruple la tension, que devrait-on observer ? *c*) En fait, compte tenu de l'étirement la corde a un mouvement apparent de fréquence N_a = 0,25 Hz. Déterminer le pourcentage d'allongement de la corde.

CONSEIL

Pour le *c*) on reliera la variation de fréquence à la variation de masse linéique. On admettra que la formule de stroboscopie $N_a = |N - N_e|$ se généralise à $N_a = |N - kN_e|$, k étant un entier tel que kN_e soit voisin de N.

CORRIGÉ

a) *La fréquence de la corde est égale à la fréquence des éclairs : entre deux éclairs la corde accomplit une oscillation : elle paraît immobile.*

b) *Soit* F′ *la nouvelle tension,* N′ *la nouvelle fréquence, d'après la question* 1,

$N' = \frac{1}{2d}\sqrt{\frac{F'}{\mu}}$, *si on compare à* $N_1 = \frac{1}{2d}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ *comme* $F' = 4F$; $N' = 2N_1 = 500$ Hz.

Entre deux éclairs la corde accomplit deux oscillations : elle devrait paraître immobile.

c) ● *La masse linéique* μ, *sous l'action de* F', *subit une variation* $\Delta\mu$, *qui fait varier la fréquence de* $\Delta N'$ *à partir de* $N' = 500$ Hz.

CORRIGÉ

● *Soit une masse de corde* m *donnée :* $\mu = \frac{m}{\ell}$ *d'où* $\frac{\Delta\mu}{\mu} = -\frac{\Delta\ell}{\ell}$.

● *D'après* $N' = \frac{1}{2d}\sqrt{\frac{F'}{\mu}}$ $\frac{\Delta N'}{N'} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta\mu}{\mu}$, *par suite* $\frac{\Delta N'}{N'} = \frac{1}{2}\frac{\Delta\ell}{\ell}$ (1).

● *Comme* $\Delta\ell > 0 \Longrightarrow \Delta N' > 0$. N' *est donc un peu supérieur à* 500 Hz. *La fréquence du mouvement apparent est donc* $N_a = N' - kN_e$ *avec* $N_e = 250$ Hz *et* $k = 2$. *Par suite* $N' = 500 + N_a$, *la variation de fréquence est* $\Delta N' = N_a = 0{,}25$ Hz.

● *D'après* (1) $\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{2\Delta N'}{N'} = \frac{2 \times 0{,}25}{500} = \frac{0{,}5}{500} = \frac{1}{1\,000} = 0{,}1\ \%$.

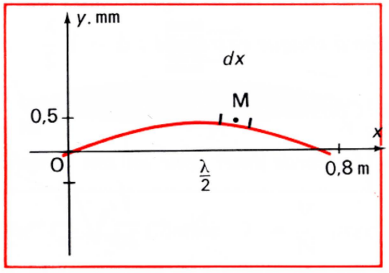
ÉNONCÉ

❸ La corde vibre sinusoïdalement à la fréquence du fondamental calculée à la première question. Elle présente un ventre de largeur 1 mm. Exprimer son énergie cinétique en fonction du temps. En déduire la valeur de son énergie mécanique, celle-ci étant nulle lorsque la corde est au repos (on néglige le poids de la corde et l'amortissement).

CONSEIL

Calculer l'élongation d'un point M de corde situé à x de A, en fonction du temps. Considérer d'abord un élément de corde de longueur dx. Ensuite intégrer.

● $y = 2a \sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi t}{T} = 2a \sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t$ (*voir n°* 114, ❷),
Pour le ventre $4a = 1$ mm.



● *Le point* M *d'abcisse* x, *a pour vitesse* $\bar{v} = \frac{dy}{dt}$.

$$\bar{v} = -2a\left(\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cdot\omega\cdot\sin\omega t$$

$$= -2a\,\omega\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\sin\omega t.$$

● *Considérons un élément de corde, de longueur* dx, *centré en* M, *sa masse est* $dm = \mu.dx$, *d'où son énergie cinétique :*

CORRIGÉ

$$dE_c = \frac{1}{2}dm\,\bar{v}^2 = \frac{1}{2}\mu\cdot 4a^2\omega^2\cdot\sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\sin^2\omega t\cdot dx = 2\mu a^2\omega^2\sin^2\omega t\cdot\sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot dx.$$

● *A un instant* t, *l'énergie cinétique de la corde est* $E_c = \int_0^{\frac{\lambda}{2}} dE_c$.

D'où $E_c = 2\,\mu a^2\omega^2\sin^2\omega t\int_0^{\frac{\lambda}{2}}\sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}\,dx.$

$$\int_0^{\frac{\lambda}{2}}\sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}.dx = \int_0^{\frac{\lambda}{2}}\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{4\pi x}{\lambda}\right)dx = \left[\frac{x}{2}-\frac{\lambda}{4\pi}\sin\frac{4\pi x}{\lambda}\right]_0^{\frac{\lambda}{2}} = \frac{\lambda}{4}-\frac{\lambda}{4\pi}\sin 2\pi = \frac{\lambda}{4}.$$

D'où $E_c = 2\,\mu a^2\omega^2.\sin^2\omega t.\frac{\lambda}{4} = \frac{1}{2}.\mu a^2\omega^2\lambda\,\sin^2\omega t = 3{,}9.10^{-4}\,\sin^2\omega t$ (J)

● *L'énergie mécanique de la corde est la somme de son énergie potentielle élastique due aux forces intérieures et de son énergie cinétique. Au repos l'énergie mécanique* $E = 0$, *puisque* $E_c = 0$ *l'énergie potentielle* $E_p = 0$.
Lorsque la corde vibre nous pouvons la considérer comme un système isolé (son poids est négligeable), subissant une transformation mécanique (il n'y a pas de frottements), son énergie mécanique se conserve donc.
En particulier lorsque la corde passe par sa position d'équilibre $E_p = 0$, *donc* $E = E_c$.
La corde repasse par sa position d'équilibre lorsque $y = 0$ *c'est-à-dire pour* $\cos \omega t = 0$ *(voir formule du début).* $\cos \omega t = 0 \Longrightarrow \sin \omega t = \pm 1 \Longrightarrow \sin^2 \omega t = 1$. *Il s'ensuit qu'alors* $E = E_c = 3{,}9.10^{-4}$ J.

CORRIGÉ

---

n° 118.

ÉNONCÉ

❶ Un tuyau sonore, de longueur *l*, comprend à sa base une embouchure, E, alimentée en air comprimé, l'autre extrémité est ouverte. Il est le siège d'ondes stationnaires présentant un ventre d'élongation au niveau de E (c'est une embouchure de flûte). Déterminer la fréquence du son émis. Application numérique $\ell = 68$ cm. On donne : vitesse du son dans l'air du tuyau $V = 340$ m/s.

CONSEIL

A l'extrémité ouverte la pression est égale à la pression extérieure, constante, il s'établit donc un nœud de pression (N_p) donc un ventre d'élongation ou vibration V_e.

CORRIGÉ

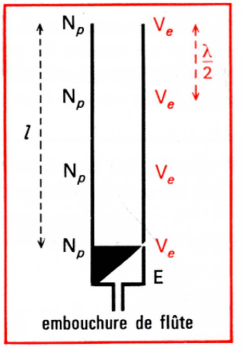
● *La distance entre deux ventres successifs étant une demi-longueur d'onde, la longueur du tuyau est telle que*

$$\ell = k\frac{\lambda}{2} \qquad k \in \mathbb{N}^* \text{ (sur la figure } k = 3)$$

d'où

$$\lambda = \frac{2\ell}{k}$$

● $\lambda = VT = \dfrac{V}{N} \Longrightarrow N = \dfrac{V}{\lambda} = k\dfrac{V}{2\ell}$, *la fréquence du son émis est donc* $N = \dfrac{V}{2\ell} = \dfrac{340}{2 \times 0{,}68} = 250$ Hz, *c'est un son complexe constitué du fondamental de fréquence* 250 Hz *et des harmoniques de fréquence* k.250 Hz.



ÉNONCÉ

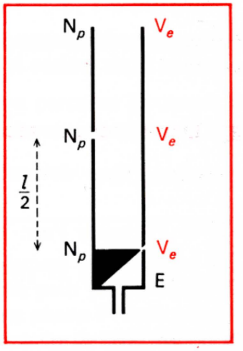
❷ On pratique une ouverture au milieu du tuyau, quelle est la fréquence du son émis ?

CORRIGÉ

● *Il s'établit au niveau du trou un nœud de pression (la pression restant égale à la pression atmosphérique), donc un ventre d'élongation* V_e.
Dans ces conditions

$$\frac{\ell}{2} = k\frac{\lambda}{2} \Longrightarrow \frac{\ell}{2} = k\frac{V}{2N} \Longrightarrow N = k\frac{V}{\ell}$$

($k = 1$ *sur la figure*). *Le son a pour fréquence* $N = \dfrac{V}{\ell} = 500$ Hz, *c'est encore un son complexe constitué du fondamental* ($N = 500$ Hz) *accompagné des harmoniques (de fréquence* k.500 Hz) :



Remarque : signalons que le nombre et l'intensité relative des divers harmoniques déterminent le timbre du son complexe et qu'ils dépendent de la pression de l'air alimentant l'embouchure.

ÉNONCÉ

❸ Le tuyau fonctionne comme au ❶. Sachant que l'oreille peut apprécier une variation relative de fréquence de 1 %, quelle variation de température de l'air du tuyau produira une modification sensible du son perçu ? La température est de l'ordre de 20 °C.

CORRIGÉ

• *Une variation de la température produit une variation de la vitesse du son.*
Soit V_0 *la vitesse du son à la température* $T_0 = 273$ °K, V *la vitesse à la température* T :

$$\frac{V}{V_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}} \quad \textit{lorsque } T \textit{ varie de } \Delta T : \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T}.$$

La température T *restant voisine de* 293 °K

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{293}.$$

• *La fréquence est reliée à* V (*voir question n°* 1) *par* $N = k\frac{V}{2\ell}$, *lorsque* V *varie de* ΔV :

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta V}{V}. \quad \textit{Par suite} \quad \frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{293}.$$

• ΔN *est perçu par l'oreille si* $\frac{\Delta N}{N} \geqslant \frac{1}{100}$ *d'où* $\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{293} \geqslant \frac{1}{100}$ $\Delta T \geqslant 5{,}8$ °K

c'est-à-dire environ 6 °C.

ÉNONCÉ

❹ L'embouchure de flûte, E, est remplacée par un autre modèle, E′, qui produit à son niveau un ventre de pression (embouchure à anche). Quelle est la fréquence du son émis ? Que peut-on dire de sa composition en harmoniques ?

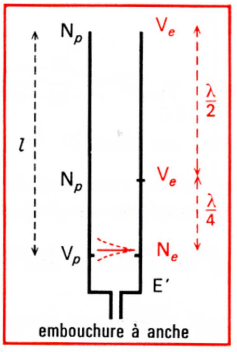
CORRIGÉ

• *Il s'établit au niveau de l'embouchure* E′ *un ventre de pression donc un nœud d'élongation (ou vibration)* N_e.

Dans ces conditions $\ell = \frac{\lambda}{4} + k\frac{\lambda}{2}$ (*sur la figure* $k = 1$).

• *D'où* $\lambda = \frac{4\ell}{2k+1} = \frac{V}{N} \Longrightarrow N = \frac{V}{\lambda} = \frac{(2k+1)V}{4\ell}$.

La fréquence du son émis est donc $N = \frac{V}{4\ell} = 125$ Hz. *Ce son complexe est composé du fondamental de fréquence* 125 Hz *et des harmoniques de fréquence* (2 k + 1).125 Hz. *On remarque que tous les harmoniques pairs sont éliminés.*



Remarque : Un tuyau à embouchure à anche doit être nécessairement ouvert pour que le courant d'air puisse le traverser.

ÉNONCÉ

❺ Dans le tuyau précédent, on alimente l'embouchure avec du gaz carbonique sous pression. Que devient la fréquence du son fondamental ? $\frac{C_p}{C_v} = 1{,}32$ pour CO_2, $\frac{C_p}{C_v} = 1{,}4$ pour l'air. La vitesse du son dans l'air à la même température est 340 m/s.
C = 12 O = 16.

RÉPONSE

N = 98 Hz.

Contrôles

Pb 32 à Pb 35

Contrôle n° 1. Les deux pointes d'une fourchette actionnée par un diapason vibrant à la fréquence N = 100 Hz, produisent en deux points S_1 et S_2 de la surface d'une nappe d'eau des perturbations sinusoïdales d'amplitude $a = 1$ mm. La célérité des ondes est V = 400 mm/s. On néglige l'amortissement. Toutes les longueurs seront exprimées en mm.

❶ Ecrire l'équation horaire du mouvement de S_1; de S_2; d'un point M situé à la distance d_1 de S_1 et d_2 de S_2. Application numérique $d_1 = 16$ mm $d_2 = 25$ mm.

❷ Déterminer l'ensemble des points où l'amplitude est nulle. Faire une figure. La distance $S_1S_2 = 12$ mm.

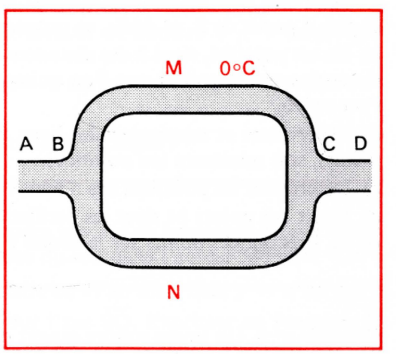
❸ Soit M un point de la médiatrice de S_1S_2, P étant le milieu de S_1S_2 on repérera M par PM = z(mm). Pour quelles valeurs de z, le mouvement de M est-il en phase avec le mouvement de S_1 (ou S_2)? Calculer les deux premières valeur de z.

❹ Soit M un point de la droite S_1S_2 qu'on orientera dans le sens $\overrightarrow{S_1S_2}$. On repérera M par $\overline{PM} = x$(mm). Exprimer l'élongation de M en fonction du temps t et de x. On distinguera les deux cas :

a) M est entre S_1 et S_2.

b) M est à l'extérieur du segment S_1S_2 (du côté de S_1). Dans l'un des cas l'onde est stationnaire, dans l'autre progressive. Précisez.

Contrôle n° 2. Un diapason effectuant 500 vibrations complètes par seconde communique son mouvement vibratoire à l'air contenu dans un tube AB devant l'extrémité A duquel il est placé. L'extrémité du tube AB communique avec deux tubes BMC et BNC de 10 m de longueur chacun et entre lesquels se partage ce mouvement vibratoire parvenu en B. Ces tubes sont convenablement courbés pour que les extrémités C des deux branches aboutissent au même point C, où elles communiquent avec un tube CD dont l'air prend, au point C, le mouvement vibratoire résultant des mouvements parvenus par BMC et par BNC.



Un auditeur introduit l'extrémité D dans son oreille. Les tubes BMC et BNC sont pleins d'air. La branche BMC est maintenue à 0 °C, la branche BNC est placée dans un bain dont on peut faire varier la température de 0 °C à 100 °C. On demande :

❶ que détecte l'oreille lorsque l'ensemble est à 0 °C

❷ de combien de degrés il faudra élever, à partir de 0 °C, la température de BNC pour que l'intensité du son perçu en D passe par son premier minimum;

❸ par combien de maximums et de minimums passe l'intensité du son perçu en D quand la température de BNC varie de 0 °C à 100 °C.

Vitesse du son dans l'air à 0 °C : $V_0 = 331{,}4$ m/s.

Note : L'oreille est sensible aux variations de pression. *(D'après Bac.)*

Contrôle n° 3. Une tige de laiton de longueur AB = 90 cm est solidement encastrée en son milieu M. L'extrémité A est engagée dans un tube de verre et porte un petit piston P, qui ne touche pas les parois du tube. Celui-ci est fermé à l'autre extrémité par un piston P′ dont on peut régler la position à volonté; il contient de l'air sec à 25 °C et une mince couche de liège en poudre

régulièrement répartie. On frotte longitudinalement la partie MB de la tige de laiton; celle-ci vibre en rendant un son de fréquence N et l'on observe que la poudre sautille fortement et se rassemble en tas.

❶ Expliquer le phénomène observé. Montrer qu'il est net pour certaines positions de P'. Préciser la position des points où la poudre se rassemble en tas.

❷ La distance PP' est alors à 47,8 cm et l'on compte 8 tas de poudre, y compris ceux adjacents à P et à P'. Calculer la fréquence N du son émis par la tige.

❸ Sachant que PP' est mesuré à 1 mm près et que la température est connue à 1 °C près, évaluer l'incertitude absolue sur N.

❹ Sachant que l'état vibratoire de la tige AB est un système d'ondes stationnaires, ne présentant qu'un nœud, calculer la célérité à 25 °C du son dans le laiton de la tige. Quelle est la précision de cette détermination si AB est connu à 1 mm près.

❺ L'air du tube est remplacé par un mélange d'hydrogène et d'oxygène à la même température de 25 °C. Le phénomène est net lorsque PP' = 54 cm et l'on compte alors 6 tas de poudre. Calculer la célérité du son à 25 °C dans le gaz du tube. En déduire la composition du mélange en volumes. On donne : célérité du son dans l'air à 0 °C : 331 m/s. *(Bac.)*

Contrôle n° 4.

❶ Si l'on fait tomber goutte à goutte de l'eau à raison de 80 gouttes à la minute sur la surface d'une nappe d'eau, on constate qu'il naît des rides circulaires dont le centre est au point de chute et que la distance entre deux crêtes consécutives est de 45 cm.
Trouver la vitesse de propagation des ondes à la surface de l'eau.

❷ On réalise en deux points de cette surface, situés à 21 cm l'un de l'autre, deux ébranlements transversaux périodiques sinusoïdaux en phase, de période 1/10 de seconde et d'amplitude 1 cm et qui, à partir de S_1 et de S_2, se propagent dans toutes les directions à la surface du liquide.
a) En un point M, situé à des distances r_1 et r_2 de S_1 et de S_2, calculer la perturbation en fonction du temps en supposant que l'on puisse négliger la variation d'amplitude sur le faible espace où l'on opère.
b) Déterminer et représenter les lieux des points M où l'amplitude est soit maximum (en traits pleins), soit minimum (en pointillé).
c) Déterminer les positions des nœuds et des ventres sur la droite indéfinie $x'x$ passant par S_1 et S_2.
d) Lieux des points M dont les oscillations sont en phase avec le point 0 situé au milieu de S_1 et de S_2. Préciser ces points sur la droite $y'y$ passant par 0 et perpendiculaire à S_1S_2. *(Bac.)*

Contrôle n° 5. Un tuyau sonore ouvert est alimenté par de l'air à 15 °C. Du côté de l'embouchure s'établit un ventre d'élongation.

❶ Que s'établit-il du côté de l'ouverture? Sachant que le système d'ondes stationnaires ne comporte que deux nœuds d'élongation distants de 50 cm, on demande :
a) la longueur d'onde du son dans le tuyau. La vitesse du son dans l'air à 15 °C étant 340 m/s, en déduire la fréquence du son émis par le tuyau ;
b) La longueur du tuyau.

❷ Calculer la longueur d'un tuyau fermé, ayant le même type d'embouchure, à la même température, qui émet un son de même fréquence que précédemment. Le régime d'ondes stationnaires qui s'établit est le plus simple possible (fondamental).

❸ Les deux tuyaux à 15 °C donnent ainsi la même fréquence, on abaisse la température de l'air actionnant l'un des tuyaux de 5 °C. Calculer la fréquence des battements perçus par l'oreille. *(D'après Bac.)*

Contrôle n° 6. Une corde SA est fixée en A, l'extrémité S est animée d'un mouvement vibratoire transversal dont l'élongation est $y = 8.\sin 20\ \pi t$ (mm). Les ébranlements transversaux se propagent à la vitesse 2,5 m/s. SA = 1 m.

a) L'extrémité A est entourée de coton qui absorbe les vibrations; quelle est, dans ce cas, l'équation du mouvement d'un point M situé à 37,5 cm de S.

b) En A les vibrations incidentes se réfléchissent. On ne tiendra compte que de cette première réflexion. Quelle est dans ce cas l'équation du mouvement d'un point M situé à la distance x de S. Pour quelles valeurs de x, M est-il un ventre (d'élongation). Dessiner l'allure de la corde, le régime est-il stationnaire?

c) Les extrémités S et A sont animées de deux mouvements vibratoires transversaux d'équation $y_S = 8 \sin 20\ \pi t$ et $y_A = 8 \sin\left(20\ \pi t + \frac{\pi}{2}\right)$. La célérité des ondes reste 2,5 m/s. On négligera les réflexions sur S et A. Quelle est dans ce cas l'équation du mouvement d'un point M situé à la distance x de S. Pour quelles valeurs de x M a-t-il un mouvement nul.

d) Les extrémités S et A sont maintenant animées de deux mouvements vibratoires transversaux d'équation $y_S = 8 \sin 20\pi t$; $y_A = 8 \sin 20{,}2\pi t$. La célérité des ondes reste 2,5 m/s. On négligera les réflexions sur S et A. Quelle est l'équation du mouvement d'un point M situé à la distance x de S. Comment se déplacent les points de mouvement nul?

Contrôle n° 7. Une fourchette vibrant à la fréquence N produit des interférences sur la surface de l'eau. La célérité des ondes est V = 40 cm/s. La distance entre les sources S_1S_2 est de 4 cm.

❶ Dessiner l'allure de la figure d'interférences. Soit $n = \frac{MS_2 - MS_1}{\lambda}$, M étant sur une ligne d'amplitude maximale (ou nulle), montrer que chaque frange est ainsi numérotée par n. Que peut on dire de n pour les franges d'amplitude maximale, et d'autre part pour les franges d'amplitude nulle?

❷ Un point M_1 situé sur la frange d'interférences de numéro n est tel que $M_1S_2 = 3$ cm et $M_1S_1 = 4{,}4$ cm. Un point M_2 situé sur la frange d'interférences de numéro $n + 5$ est tel que $M_2S_2 = 3{,}6$ cm, $M_2S_1 = 3$ cm.
Déterminer la longueur d'onde et la fréquence N. Quelle est la nature des franges d'interférences de numéros n et $n + 5$?

❸ Entre quelles valeurs se trouve compris n pour l'ensemble des franges?

Contrôle n° 8. Une source sonore S ponctuelle émet des ondes sonores de fréquence N = 170 Hz. Elle est placée à 20 m d'un grand mur vertical M. La vitesse du son dans l'air est 340 m/s.

❶ Un observateur se déplace le long de OS, perpendiculaire en O au mur. Soit $y = a \sin 2\pi Nt$ l'élongation de la source en fonction du temps mesuré sur l'axe $\overrightarrow{SO}$. Exprimer en fonction du temps t, l'élongation d'un point P de OS, mesurée sur l'axe $\overrightarrow{SO}$. On repérera P par son abscisse $x = \overline{OP}$. En déduire la répartition des nœuds et des ventres d'élongation. Sachant que l'oreille est sensible aux variations de pression, en quels endroits l'observateur percevra-t-il un son maximum, un son nul? On néglige l'amortissement.

❷ La source S produit à son niveau une variation de pression $p - p_0 = p_m \cos 2\pi Nt$; p_0 pression de l'air à l'équilibre, p_m amplitude de la variation de pression. Exprimer en fonction du temps la variation de pression $p - p_0$ d'un point P de OS repéré par $x = \overline{OP}$. (Dans la première question, on a trouvé qu'il s'établit au voisinage immédiat du mur M un certain état de la pression, on en déduira si la variation de pression change ou ne change pas de signe dans la réflexion sur M.) Retrouver la répartition des nœuds et des ventres de pression sur OS.

❸ On admettra que pour étudier la réflexion des ondes sphériques sonores (de variation de pression), on peut remplacer le mur M par une source fictive S', en phase avec S, placée symétriquement par rapport à M. Déterminer l'ensemble des points de l'espace où un observateur

pourrait percevoir un maximum d'intensité sonore. On montrera qu'on obtient ainsi les surfaces ventrales de variations de pression dont on déterminera les intersections avec SO. On ne tiendra pas compte de la réflexion sur le sol.

❹ L'amplitude de la variation de pression p_m d'une onde progressive sphérique est en fait inversement proportionnelle à la distance d à la source. On posera $p_m = \frac{K}{d}$. Déterminer K sachant que la variation maximale de pression en O est 0,2 Pa. Quelle sera la variation maximale de pression au « nœud de pression » le plus proche de O, au nœud et au ventre les plus proches de I, milieu de OS?

Contrôle n° 9.

❶ Un fil de cuivre, de longueur 1,20 m, de section 1 mm², est tendu verticalement, passant entre les branches d'un aimant permanent, en U. Il est parcouru par un courant alternatif de fréquence 50 Hz, il vibre en un seul fuseau. Quelle est la tension F qu'il subit? La masse volumique du cuivre est 9 g/cm³.

❷ L'aimant en U est remplacé par un électro-aimant, dont les deux pôles sont du même côté du fil et qui est connecté en série avec le fil. La fréquence du courant restant 50 Hz, comment faut-il modifier la tension F si l'on veut encore observer un fuseau?

❸ On reprend le dispositif du ❶, la tension reprend la valeur F calculé au ❶. On fixe au milieu I du fil une petite masse en plomb. On peut concentrer la masse du système (fil-petite masse) en I, soit $m = 27$ g la masse de ce point matériel. La tension du fil reste F. Quelle devrait être la fréquence du courant si l'on veut que la petite masse vibre en résonance?

Contrôle n° 10. Une source sonore, qui émet un son de fréquence N, est placée à l'entrée d'un trombone de Koenig; un auditeur écoute à la sortie.

❶ Tirant la coulisse, l'auditeur perçoit des minima d'intensité sonore lorsque l'index lié à la coulisse est devant les divisions : 13 cm; 30 cm; 47 cm.
La vitesse du son dans l'air du tube, à 15 °C, est V = 340 m/s. Déterminer la fréquence N.

❷ La position de la coulisse est déterminée à 5 mm près, on néglige l'incertitude sur V. Quelle est l'incertitude absolue sur N?

❸ La température de l'air enfermé subit une variation, il faut tirer la coulisse de 17,5 cm pour percevoir deux minima successifs. Evaluer la température θ.

❹ L'air est ramené à 15 °C, les deux trajets suivis par le son, sont égaux à $l = 1{,}87$ m, que perçoit l'auditeur? L'air de l'un des trajets est amené à la température θ afin que l'auditeur perçoive un premier minimum d'intensité sonore. Evaluer θ.

❺ On remplace l'air du tube par un mélange d'azote et d'hydrogène, à 15 °C. Il faut tirer la coulisse de 24 cm pour percevoir deux minima successifs. Quelle est la densité du mélange, par rapport à l'air? Quelle est sa composition en volume? H = 1 N = 14.

Contrôle n° 11.

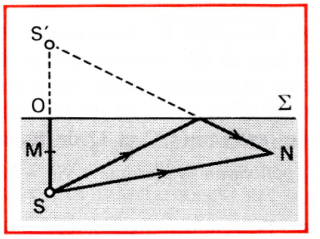
❶ Deux sources sonores ponctuelles S_1 et S_2 émettent en phase des sons sinusoïdaux de fréquence N = 500 Hz. La distance S_1S_2 égale 6 m. La célérité du son est V = 340 m/s. Un microphone sensible aux variations de pression est placé en un point M situé à 4,50 m de S_1 et à 5,86 m de S_2. Est-il correct d'après le principe de la superposition des petits mouvements d'ajouter algébriquement l'élongation y_1 qu'aurait M sous l'action de S_1 seule, et y_2 qu'aurait M sous l'action de S_2 seule? Quelle interprétation proposez-vous pour expliquer ce que détecte le microphone placé en M? A partir de M on déplace le microphone de façon que le son qu'il détecte ait une intensité constante. Sur quelle surface peut-on le déplacer? On déterminera la position du point d'intersection de cette surface avec la droite S_1S_2.

❷ On déplace maintenant le microphone sur le segment S_1S_2. En quels points détecte-t-il des sons maxima.

❸ S_1 garde la fréquence $N_1 = 500$ Hz, S_2 à une fréquence N_2 inconnue, voisine de N_1. Un auditeur compte 30 maxima d'intensité sonore en 15 s. Montrer qu'il y a deux valeurs possibles pour N_2.

❹ On prendra pour N_2 la plus grande valeur trouvée au ❸ Soit M un point de S_1S_2 repéré par $\overline{S_1M} = x$. Déterminer l'équation de la vibration produite en M par S_1 et S_2. Déterminer l'abscisse x d'un point M où l'auditeur n'entendra rien à l'instant t. Dans quel sens et à quelle vitesse doit-il se déplacer s'il veut continuer à ne rien entendre. L'oreille est sensible aux variations de pressions.

Contrôle n° 12. Une source sonore est située dans l'eau, les ondes émises se réfléchissent sur la surface libre Σ où la pression reste égale à la pression atmosphérique. Dans tout le problème on ne tient pas compte de l'amortissement.



❶ La variation de pression en S est $p - p_0 = p_m \cos 2\pi \frac{t}{T}$.

p est la pression à l'instant t, p_0 la pression à l'équilibre.

a) Que peut-on dire de $(p - p_0)$ en O? Exprimer la variation de pression en M situé sur OS en fonction de : p_m, t, de $x = OM$, de $h = OS$, de la longueur d'onde λ, de T.

b) Montrer que les ondes réfléchies par Σ, en O, sont identiques aux ondes qui seraient émises par une source S', symétrique de S par rapport à Σ, vibrant en opposition de phase dont les ondes se propageraient dans l'eau. On admettra que ce résultat est valable non seulement pour M, mais aussi pour tout point N.

c) Exprimer la variation de pression en N. On posera : $SN = d$ $\quad S'N = d'$.

❷ L'élongation en S, mesurée dans la direction de propagation, est $y_S = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$. En S' : $y_{S'} = -a \sin 2\pi \frac{t}{T}$

a) Montrer que sur l'axe $\overrightarrow{SS'}$: $y_S = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$. $y_{S'} = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$. En déduire l'équation horaire du mouvement de M, en utilisant les variables du ❶ *a*).

Montrer que, sur SO, les nœuds de pression sont ventres d'élongation, c'est-à-dire qu'il y a quadrature spatiale entre pression et élongation.

b) On considère un point N suffisamment loin de O, si bien que SN et S'N sont pratiquement alignés. Ecrire l'équation horaire du mouvement de N, en utilisant les variables du ❶ *c*).

Montrer que la variation de pression en N et l'élongation y sont en quadrature, c'est-à-dire qu'il y a quadrature temporelle.

Contrôle n° 13.

❶ Les points de la surface libre d'un liquide en équilibre sont repérés par leurs coordonnées dans un système d'axes rectangulaire (Ox, Oy). On ne considérera que le quart de plan ($x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$).

On dispose une règle horizontale R_1, affleurant le liquide, au-dessus de Ox. Cette règle donne un coup sec, uniformément sur toute sa longueur, sur la surface libre du liquide. Il apparaît une ride r, parallèle à R_1, de même longueur, qui s'éloigne de R_1, suivant la direction Oy, avec une vitesse constante V.

Comparer le mouvement d'un point de la surface du liquide, lors du passage de r, à celui qui a été produit au niveau de R_1.

❷ La règle est maintenant animée d'un mouvement vertical d'équation horaire : $z = a \sin 2\pi Nt$. Elle entraîne la surface du liquide à son contact.
Déterminer l'équation horaire du mouvement d'un point M de la surface du liquide. Discuter. Dans cette question, ainsi que dans les questions ❸, ❹, ❺, on néglige l'amortissement et les réflexions.

Les extrémités A et B de R_1 ont pour abscisses x_A et x_B.

Application numérique : $a = 1$ mm; $N = 100$ Hz; $V = 60$ cm/s; $x_A = 1$ cm; $x_B = 9$ cm.

❸ Comment se présente la coupe de la surface du liquide, à l'instant t, suivant un plan vertical d'équation cartésienne : $x = x_0$. Discuter.

Application numérique : $t = 0$ puis $t = 2{,}5.10^{-3}$ s; $x_0 = 4$ cm. Echelle : 1 cm pour 1 mm. De quel type d'ondes s'agit-il ici ?

❹ Une règle R_2, identique à R_1, animée du même mouvement, entraîne la surface du liquide le long de Oy. Montrer que la surface du liquide se décompose en différentes zones, que peut-on dire de chacune d'elles, du point de vue mécanique ? Déterminer l'équation horaire du mouvement d'un point M de la surface du liquide. Discuter.
Les extrémités C et D de R_2 ont pour ordonnées y_C et y_D.

Application numérique : $y_C = 1$ cm; $y_D = 9$ cm.

❺ Déterminer, dans le champ d'interférences, l'ensemble des points où l'amplitude est maximale; puis l'ensemble des points où l'amplitude est nulle. Quel est l'aspect de la surface du liquide ?

Application numérique : Combien de lignes de repos compte-t-on ?

❻ La règle R_2 est retirée. Les ondes émises par R_1 se réfléchissent sur une paroi P, parallèle à R_1, d'ordonnée y_P. Quel phénomène observe-t-on ? A quelle condition sera-t-il parfaitement net ? (Certains points de la surface du liquide vibrent alors avec une amplitude très supérieure à celle des points qui sont au contact de R_1 et de P.)

Application numérique : Quelle condition doit vérifier y_P ?

❼ La condition précédente étant réalisée. Déterminer l'équation horaire du mouvement d'un point M de la surface du liquide. (On ne tiendra compte que de la réflexion sur P.) Discuter. Comment se présente la coupe de la surface du liquide, à l'instant t, suivant un plan vertical d'équation cartésienne : $x = x_0$. Discuter.

Application numérique : $t = 0$ puis $t = 2{,}5.10^{-3}$s; $x_0 = 4$ cm. Echelle : 1 cm pour 1 mm. De quel type d'ondes s'agit-il ici ?

Interférences lumineuses

Pb 36 à Pb 38

■ **Conseils généraux**

— Voir tableau récapitulatif (Physique page 165).

— Dans la formule $i = \frac{\lambda D}{a}$: bien remarquer que D représente la distance séparant les deux sources cohérentes de l'écran.

— Le programme limite l'étude aux fentes d'Young et aux miroirs de Fresnel.

---

n° 119 (*d'après Bac.*)

ÉNONCÉ

❶ Une source monochromatique S éclaire deux fentes fines S_1 et S_2, parallèles, distantes l'une de l'autre de 3 mm et distantes de S de 50 cm. La source est sur la perpendiculaire au plan de S_1S_2 et est équidistante de S_1 et S_2. On observe des interférences sur un écran E placé à D = 3 m du plan de S_1S_2.
Entre la 6e frange brillante située avant la frange centrale, et la 6e frange brillante située après la frange centrale, la distance ℓ égale 7,2 mm. Quelle est la longueur d'onde de la radiation émise par S ?

CORRIGÉ

● *Entre les deux franges brillantes repérées on compte douze interfranges*, i, *par suite* $\ell = 12\ i$

● *Soit* a *la distance* S_1S_2, λ *la longueur d'onde :* $i = \frac{\lambda D}{a} \Longrightarrow \lambda = \frac{ia}{D}$.

● *En résumé* (1) $\lambda = \frac{\ell a}{12D} = \frac{7{,}2 \times 3}{12 \times 3\,000} = 0{,}6.10^{-3}$ mm $= 0{,}6\ \mu$.

ÉNONCÉ

❷ Quelle est l'incertitude absolue sur la longueur d'onde, sachant que l'on a mesuré ℓ et S_1S_2 à 0,1 mm près et D à 1 cm près ?

CORRIGÉ

D'après la formule (1)

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta\ell}{\ell} + \frac{\Delta D}{D} = \frac{0{,}1}{3} + \frac{0{,}1}{7{,}2} + \frac{1}{300} = 0{,}05.$$

Donc $\Delta\lambda = 0{,}6 \times 0{,}05 = 0{,}03\ \mu$ *par suite* $\lambda = 0{,}60 \pm 0{,}03\ \mu$.

ÉNONCÉ

❸ On déplace S de 2,5 mm, parallèlement à S_1S_2. De combien et dans quel sens se déplace la frange centrale ?

CONSEIL

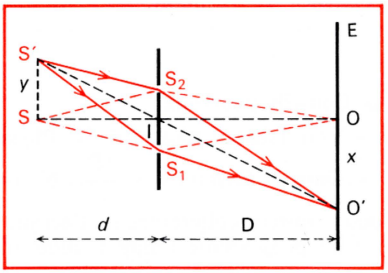
La frange centrale n'est pas nécessairement au milieu du champ d'interférences. Le temps mis par la lumière pour aller de S à la frange centrale est le même quel que soit le chemin suivi.

CORRIGÉ

● *Initialement*, S *et la frange centrale* O, *sont dans le plan médiateur de* S_1S_2. *Lorsque la source vient en* S', *la frange centrale se déplace en* O'. *La lumière se propage de* S' *à l'écran partout à la même vitesse, les deux trajets pour aller de* S' *à* O' *doivent donc avoir même longueur :*

$$S'S_2 + S_2O' = S'S_1 + S_1O'.$$

Sur la figure $S'S_1 > S'S_2$, *donc* $S_1O' < S_2O'$: O′ *est au-dessous de* O. *La frange centrale et la source se déplacent en sens inverse.*



● $S_2O' - S_1O' = S'S_1 - S'S_2$.

On sait que $\delta = S_2O' - S_1O' = \dfrac{ax}{D}$.

CORRIGÉ

On démontrerait de même que $S'S_1 - S'S_2 = \dfrac{ay}{d}$

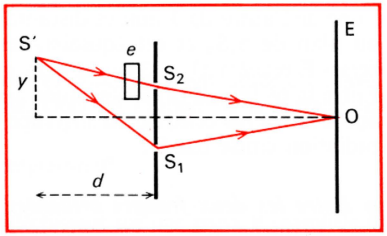
(d *distance de* S *à* S_1S_2 *est grande devant* a *et* y). *Donc*

$$\frac{ax}{D} = \frac{ay}{d} \Longrightarrow x = \frac{D}{d}y = \frac{300}{50} \times 0{,}25 = 1{,}5 \text{ cm}.$$

Remarquons que S′O′ *passe par le milieu* I *de* S_1S_2.

ÉNONCÉ

❹ On ramène la frange centrale à sa position primitive O, en plaçant devant l'une des deux à fentes une lame à faces parallèles, d'indice $n = 1{,}5$. Où doit-on la mettre ? Quelle épaisseur, e, convient-il de lui donner ?



● *La lumière se propage moins vite dans le verre que dans l'air ; la distance* $S'S_2O$ *est plus courte que* $S'S_1O$ *sur la figure, pour que les temps de parcours soient les mêmes, il faut donc placer la lame devant* S_2.

● *Exprimons que les temps de parcours* t_1 *et* t_2 *pour passer de* S′ *à* O *sont égaux :*
— *trajet* $S'S_2O$: *supposons que la lumière traverse pratiquement normalement la lame, dans ce cas le trajet dans la lame est* e.

Soit c *la vitesse dans l'air,* V *dans le verre, nous savons que* $V = \dfrac{c}{n}$.

CORRIGÉ

Par suite $$t_2 = \frac{S'S_2 - e}{c} + \frac{e}{V} + \frac{S_2O}{c}.$$

— *trajet* $S'S_1O$: $$t_1 = \frac{S'S_1}{c} + \frac{S_1O}{c}.$$

— *Par suite* $t_1 = t_2$ *conduit, après multiplication par* c :

$$S'S_2 - e + e\frac{c}{V} + S_2O = S'S_1 + S_1O, \quad \textit{comme } S_2O = S_1O$$

$$e\left(\frac{c}{V} - 1\right) = S'S_1 - S'S_2 \Longrightarrow (n-1)e = \frac{ay}{d}.$$

● *Numériquement* $$e = \frac{ay}{(n-1)d} = \frac{3 \times 2{,}5}{0{,}5 \times 500} = 3.10^{-2} \text{ mm}.$$

● *Remarquons que tout se passe comme si la lame introduisait un trajet supplémentaire dans l'air, égal à* $(n-1)e$. *L'expérience ne serait pas modifiée si on plaçait la lame juste derrière* S_2.

ÉNONCÉ

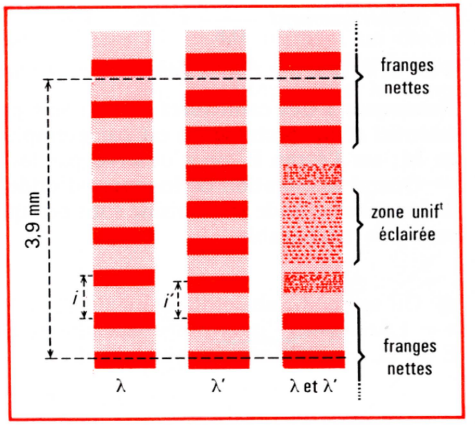
❺ On remplace la source monochromatique par une source qui émet deux radiations de longueurs d'onde $\lambda = 0{,}60\ \mu$ et $\lambda' = 0{,}52\ \mu$. Cette source est placée en S. Montrer que l'on voit sur l'écran E des plages où les franges sont nettes et des plages pratiquement uniformément éclairées. Quelle distance sépare les axes de deux plages consécutives de franges nettes ?

CORRIGÉ

● *Sur la frange centrale, en* O, *l'éclairement est maximal pour les deux radiations, puisque la différence de marche est nulle. Il y a donc en* O *une frange brillante.*

Evaluons les interfranges. Pour $\lambda = 0{,}6\ \mu$, $i = 0{,}6$ mm (1re *question*). *Pour* $\lambda' = 0.52\ \mu$, *comme l'interfrange est proportionnel à la longueur d'onde*

$$\frac{i'}{i} = \frac{\lambda'}{\lambda} \Longrightarrow i' = i\frac{\lambda'}{\lambda} = 0{,}52 \text{ mm.}$$



● *Au voisinage de la frange centrale le décalage entre les franges brillantes est peu marqué, elles se superposent en donnant des franges nettes. Lorsque le décalage est d'un demi-interfrange l'éclaiment est pratiquement uniforme. Lorsque le décalage est d'un interfrange les franges se superposent en donnant des franges nettes. A chaque interfrange* i, *le décalage est* $i - i'$, *pour que ce décalage soit égal à* i *il faut compter* n *interfranges tel que* $n(i - i') = i$. *On dit qu'il y a coïncidence.*

[*Remarquons que cette relation s'écrit* $(n - 1)\,i = n\,i'$, *elle rappelle ainsi la formule vue à propos de la méthode des coïncidences pour les pendules.*]

● *Numériquement* $n = \dfrac{i}{i - i'} = \dfrac{0{,}6}{0{,}6 - 0{,}52} = 7{,}5$. *La coïncidence n'a pas lieu sur une frange brillante* (n *serait alors entier*), *mais sur une frange obscure.*

Par suite entre les axes de deux plages consécutives de franges nettes la distance est n i' (*ou* $(n - 1)\,i$) *c'est-à-dire* $7{,}5 \times 0{,}52 = 3{,}9$ mm.

ÉNONCÉ

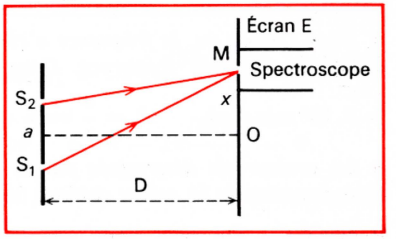
6 On remplace la source précédente par une source de lumière blanche. Qu'observe-t-on sur l'écran E ? On place la fente d'un spectroscope, parallèle à la frange centrale, à 4 mm de celle-ci, dans le plan de E. Combien compte-t-on de cannelures sombres dans le spectre ? Limites du spectre visible : [0,4 μ ; 0,8 μ.]

CONSEIL

● La différence de marche est la même pour toutes les radiations. Les cannelures correspondent aux radiations produisant une frange obscure sur la fente du spectroscope. Il est commode d'évaluer les longueurs en microns.

CORRIGÉ

● *Evaluons la différence de marche en* M :



$$MS_1 - MS_2 = \delta = \frac{ax}{D} = \frac{3.10^3 \times 4.10^3}{3.10^6} = 4\mu$$

● *Une radiation de longueur d'onde* λ *donne une frange obscure en* M *lorsque :*

$$\delta = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \quad d'où \quad \lambda = \frac{2\delta}{2k + 1}\ (\mu)$$

λ *est ainsi défini en fonction du paramètre* $k \in N$

● *Comme* $\lambda_m \leqslant \lambda \leqslant \lambda_M$ $\quad 2k + 1 = \dfrac{2\delta}{\lambda}$ *est compris entre* $\dfrac{2\delta}{\lambda_M}$ *et* $\dfrac{2\delta}{\lambda_m}$

$$\frac{2\delta}{\lambda_M} \leqslant 2k + 1 \leqslant \frac{2\delta}{\lambda_m}$$

le nombre de valeurs de k *c'est-à-dire le nombre de cannelures est ainsi déterminé.*

● *Numériquement* $\frac{2 \times 4}{0{,}8} \leqslant 2k + 1 \leqslant \frac{2 \times 4}{0{,}4} \Longrightarrow 10 \leqslant 2k + 1 \leqslant 20$; $4{,}5 < k < 9{,}5$.

$k \in \{ 5, 6, 7, 8, 9 \}$: *il y a donc cinq cannelures sombres dans le spectre.*

CORRIGÉ

Remarques : Ces cannelures s'observent par l'intermédiaire du spectroscope (l'élément essentiel d'un spectroscope est par exemple un prisme) qui analyse la lumière arrivant en M; sur l'écran E, on n'observe pas les cannelures mais les franges d'interférences. — Quand la radiation de longueur d'onde λ est rigoureusement éteinte, les radiations de longueur d'onde très voisine sont presque éteintes, ainsi les cannelures ont une épaisseur non négligeable.

ÉNONCÉ

7 On reprend tout le dispositif du **1**. L'ensemble est plongé dans un liquide d'indice $n = 1{,}5$. Evaluer l'interfrange. Sachant que la largeur du champ d'interférence sur l'écran E est $2L = 13{,}2$ mm. Combien peut-on compter de franges brillantes ?

CORRIGÉ

● *La célérité de la radiation dans le liquide est* $V = \frac{c}{n}$. *La fréquence n'est pas modifiée, évaluons la nouvelle longueur d'onde* λ' :

$$\lambda' = VT = \frac{c}{n}T = \frac{\lambda}{n} = \frac{0{,}6}{1{,}5} = 0{,}4\mu.$$

Les dimensions du système sont inchangées (D *et* a *ne varient pas*), *l'interfrange est donc proportionnel à la longueur d'onde* $\frac{i'}{i} = \frac{\lambda'}{\lambda} \Longrightarrow i' = 0{,}6 \times \frac{0{,}4}{0{,}6} = 0{,}4$ mm.

● *Repérons les milieux des franges brillantes par leur abscisse* x *mesurée à partir de la frange centrale (située dans cette question au centre du champ d'interférences).*
Les franges brillantes sont définies par $x = k\,i \quad k \in Z$.

Comme $-L \leqslant x \leqslant +L$; $-L \leqslant ki \leqslant +L$ *d'où* $-\frac{L}{i} \leqslant k \leqslant \frac{L}{i}$.

● *Numériquement* $L = \frac{13{,}2}{2} = 6{,}6$ mm $-\frac{6{,}6}{0{,}4} \leqslant k \leqslant \frac{6{,}6}{0{,}4}$ $-16{,}5 < k < 16{,}5$

Par suite $k \in \{ -16, -15, ..., 0, ..., 15, 16 \}$: *il y a donc* 33 *franges brillantes.*

ÉNONCÉ

8 Dans les expériences des questions **1** et **7**, calculer la fréquence des radiations. La couleur des franges brillantes dans ces deux expériences a-t-elle changé ?

CORRIGÉ

● *Nous l'avons vu, la fréquence n'est pas modifiée, quand la radiation passe de l'air dans le liquide. Soit* ν *la fréquence. Dans l'air* $\lambda = 0{,}6\ \mu$ *et la vitesse de propagation est* c $= 3.10^8$ m/s *d'où* $\lambda = \frac{c}{\nu} \Longrightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.10^8}{6.10^{-7}} = 5.10^{14}$ Hz.

● *La couleur est déterminée par la fréquence : les franges brillantes ont donc dans les deux expériences la même couleur (couleur jaune voir ci-dessous).*

Remarque : On peut avec une part d'arbitraire, découper le spectre de la lumière blanche :

longueur d'onde dans l'air (ou vide) →

0,4 μ	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8
violet	bleu	vert	jaune		orange		rouge	

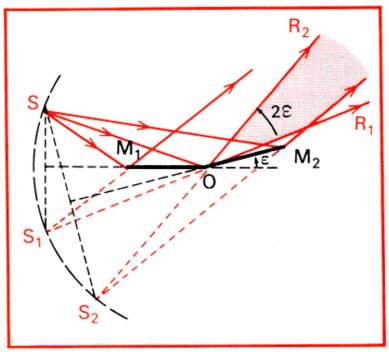
n° 120.

ÉNONCÉ

❶ Une source ponctuelle S éclaire deux miroirs plans M_1 et M_2 formant un dièdre d'arête O. L'angle des deux plans est ε rd. Soient S_1 et S_2 les images de S. Montrer que S, S_1 et S_2 sont sur un cercle de centre O. Evaluer l'angle (OS_1, OS_2). Représenter le champ d'interférences.

CONSEIL

Rappelons qu'un miroir plan donne d'un point objet un point image. Objet et image sont symétriques par rapport au plan du miroir.



- S_1 *est symétrique de* S *par rapport à* M_1, *donc* $OS_1 = OS$. *De même* $OS_2 = OS$: S_1, S_2 *et* S *sont donc sur un cercle de centre* O

- *Lorsque* M_2 *pivote à partir du plan* M_1 *d'un angle* ε, *le rayon réfléchi en* O *pivote* (de OR_1 *à* OR_2) *de* 2 ε. *D'où* $(OS_1, OS_2) = 2\varepsilon$

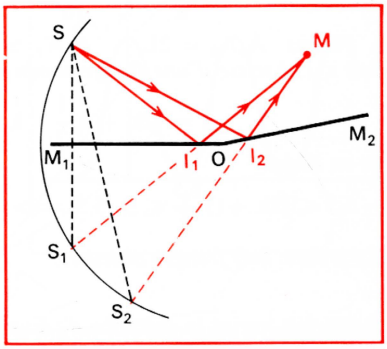
- *On a coloré le champ d'interférences c'est la partie commune aux deux faisceaux réfléchis.*

CORRIGÉ

ÉNONCÉ

❷ Soit M, un point du champ d'interférences. Montrer que la différence de phase des deux vibrations lumineuses qui interfèrent en M serait la même si on remplaçait le système (S, M_1, M_2) par deux sources S_1 et S_2 vibrant en phase.

- *Soit* $y = b \sin \omega t$ *l'équation de la vibration lumineuse de la source* S *(l'origine des temps étant convenablement choisie).*



- *En* I_1 $\quad y = b \sin \left(\omega t - 2\pi \dfrac{(SI_1)}{\lambda} \right)$, *la phase initiale est donc* $\varphi = -2\pi \dfrac{(SI_1)}{\lambda}$.

La réflexion introduit un retard Φ *(analogue au retard* $\Phi = \pi$ rd *qu'une vibration mécanique acquiert en se réfléchissant sur un obstacle fixe). Après réflexion la phase initiale est*

$$\varphi = -2\pi \frac{(S.I_1)}{\lambda} - \Phi.$$

CORRIGÉ

En M *la vibration réfléchie par* M_1 *a la phase initiale* $\varphi_1 = -2\pi \dfrac{(SI_1)}{\lambda} - \Phi - 2\pi \dfrac{(I_1M)}{\lambda}$.

Comme $SI_1 = S_1I_1 \Longrightarrow SI_1 + I_1M = S_1M$, *d'où* $\varphi_1 = -2\pi \dfrac{(S_1M)}{\lambda} - \Phi$.

- *On montrerait de même que la vibration réfléchie par* M_2 *a, en* M, *la phase initiale*

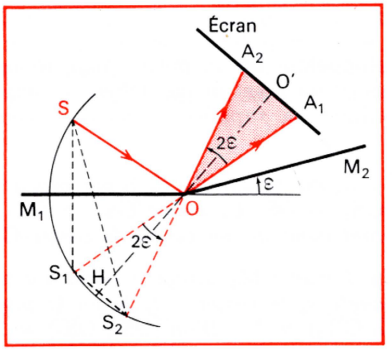
$$\varphi_2 = -2\pi \frac{S_2M}{\lambda} - \Phi.$$

- *Par suite le déphasage en* M *entre la vibration réfléchie par* M_1 *et la vibration réfléchie par* M_2 *est* $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi \dfrac{S_2M - S_1M}{\lambda} = 2\pi \dfrac{\delta}{\lambda}$. *Le déphasage est donc exactement le même que si on avait deux sources ponctuelles* S_1 *et* S_2, *synchrones, en phase.*

ÉNONCÉ

❸ On coupe le champ d'interférences par un écran parallèle à S_1S_2. Soit d' la distance de l'écran à l'arête commune des miroirs. Soit d la distance de la source S à l'arête commune. On supposera que les miroirs ont une largeur suffisante pour que le champ d'interférences ne soit limité que par les rayons S_1O et S_2O. (Ceci est presque toujours réalisé). On donne $d = 25$ cm $d' = 275$ cm.

a) Sachant que $S_1S_2 = 1$ mm, quel est l'angle des deux miroirs ?



CORRIGÉ

● $\widehat{S_1S_2} = 2\,d.\varepsilon$, *on peut confondre la corde et l'arc, d'où* $S_1S_2 = a = 2\,d\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{a}{2d} = \frac{1}{2 \times 250} = \frac{1}{500} = 2.10^{-3} \text{ rd.}$$

Sachant qu'une minute est égale à 3.10^{-4} rd,

$$\varepsilon = \frac{2.10^{-3}}{3.10^{-4}} = \frac{20}{3} = 6'40''.$$

ÉNONCÉ

b) La source S émet une radiation de longueur d'onde $\lambda = 0{,}5\ \mu$ dans l'air. Quel est l'interfrange ? Combien peut-on compter de franges sombres ?

CORRIGÉ

● *Soit* D *la distance séparant* S_1S_2 *de l'écran.* $D = HO'$ *(voir figure).*
Pratiquement $OH \simeq d$, *d'où* $D = d' + d = 2{,}75 + 0{,}25 = 3$ m.

L'interfrange $i = \dfrac{\lambda D}{a} = \dfrac{5.10^{-7} \times 3}{10^{-3}} = 1{,}5.10^{-3}\text{ m} = 1{,}5\text{ mm.}$

● *Posons* $A_1A_2 = 2L$ $\quad A_1A_2 \simeq 2\varepsilon.d' = 2 \times 2.10^{-3} \times 2{,}75 = 11.10^{-3} = 11$ mm.
Soit x *l'abscisse d'une frange sombre comptée à partir de* O', *pour de telles franges*

$$x = (2k + 1)\frac{i}{2} \quad k \in Z, \quad \textit{comme} \quad -L \leqslant x \leqslant +L,$$

on en déduit

$$-5{,}5 \leqslant (2k+1)\frac{1{,}5}{2} \leqslant +5{,}5 \Longrightarrow -4{,}16 < k < 3{,}16 \Longrightarrow k \in \{-4, -3, .. 0 .., 2, 3\}$$

Il y a donc huit franges obscures.

ÉNONCÉ

c) On fait varier la distance d'. Evaluer (à une unité près) le nombre n de franges brillantes en fonction de d'. Quelle est la limite de n lorsque d' croît indéfiniment ?

CORRIGÉ

● *Soit* 2 L *la largeur du champ d'interférences sur l'écran, on obtient le nombre* n *de franges brillantes (à une unité près) en divisant* 2L *par* i $\quad n = \dfrac{2L}{i}$.

● $2L = 2\,\varepsilon\,d'$ (ε *ne varie pas puisque* S, M_1 *et* M_2 *ne sont pas déplacés*)

$i = \dfrac{\lambda(d' + d)}{a}$; a *ne varie pas, d'où* $n = \dfrac{2\varepsilon d' a}{\lambda(d + d')} = \dfrac{8d'}{d' + 25}$ (d' en cm).

● *Lorsque* d' *tend vers l'infini* n *tend vers* 8.

ÉNONCÉ

❹ On admettra que l'éclairement de l'écran en un point M est proportionnel au carré de l'amplitude A de la vibration résultante en M. Comment varie l'éclairement E en fonction de x ? (x étant la distance séparant M de la frange centrale.)

● *D'après la deuxième question, en* M *les deux vibrations qui interférent ont des équations* $y_1 = b \sin(\omega t + \varphi_1)$ *et* $y_2 = b \sin(\omega t + \varphi_2)$ *avec* $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi\frac{\delta}{\lambda}$.

● *La vibration résultante en* M *a pour équation*

$$y = y_1 + y_2 = 2b \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right),$$

son amplitude $A = 2b\left|\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right| = 2b\left|\cos\frac{\pi\delta}{\lambda}\right|$, *l'éclairement de l'écran* E *en* M *est donc* $E = KA^2 = K4b^2\cos^2\frac{\pi\delta}{\lambda}$; K *étant un coefficient de proportionnalité constant.*

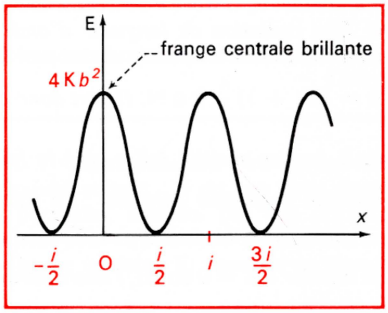
● *Comme* $\delta = \frac{ax}{D}$ (1) *et que* $i = \frac{\lambda D}{a} \Longrightarrow \lambda = \frac{ia}{D}$ (2) *on en déduit en divisant* (1) *par* (2)

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{x}{i}. \qquad \textit{Donc} \qquad E = K4b^2\cos^2\frac{\pi x}{i}.$$

CORRIGÉ

E *peut d'ailleurs s'écrire* $E = K2b^2\left(1 + \cos\frac{2\pi x}{i}\right)$: E *est fonction sinusoïdale de* x.

Pour $\begin{cases} x = 0 ; E = K.2\,b^2 \times 2 = 4\,Kb^2 \\ x = \frac{i}{2} ; E = 0 \end{cases}$

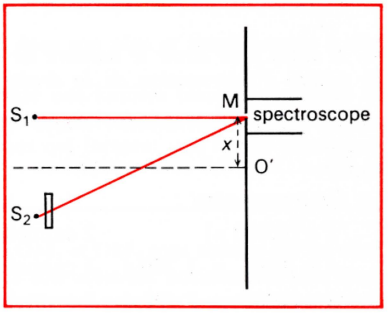


● *Remarquons que si les deux sources* S_1 *et* S_2 *étaient incohérentes, l'éclairement de l'écran serait la somme des éclairements* E_1 *et* E_2 *dus aux deux sources* $E_1 = K.b^2$ $E_2 = K.b^2$ E *serait uniforme et égal à* $2\,Kb^2$. *Nous voyons donc que le phénomène d'interférences modifie la répartition de l'éclairement qui passe de* $4\,Kb^2$ *(pour les franges brillantes) à* 0 *pour les franges sombres.*

ÉNONCÉ

5 S émet de la lumière blanche, on place devant le miroir M_2 une lame à faces parallèles d'épaisseur $e = 2\,\mu$, d'indice $n = 1{,}5$. On place la fente d'un spectroscope, parallèlement aux franges, à x microns du centre de l'écran O′ (point d'intersection de la médiatrice de S_1S_2 et de l'écran).

Le spectroscope est du côté de M_1 par rapport à O′ (voir schéma). Montrer que pour le point O′($x = 0$) tout se passe comme s'il existait une différence de marche δ_0. Evaluer ensuite la différence de marche δ pour le point M situé à la distance x de O′. En déduire comment varie le nombre de cannelures observables dans le spectre quand x varie entre 0 et $4{,}5.10^3\ \mu$.
La lumière blanche comprend toutes les radiations de longueur d'onde (dans l'air) comprise entre 0,4 μ et 0,8 μ. Les données numériques sont celles de la question **3**.



● S_1 *et* S_2 *sont en phase (voir* ❷*), évaluons les temps de parcours pour aller de* S_1 *à* O′ *et de* S_2 *à* O′

— *trajet* S_1O' : $t_1 = \dfrac{S_1O'}{c}$.

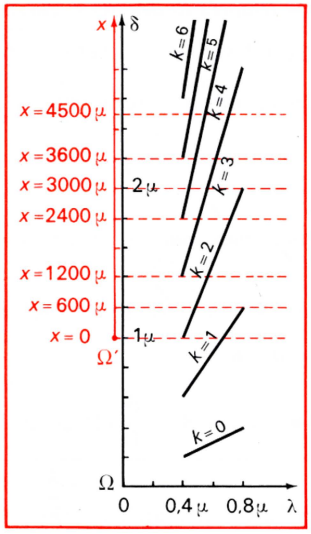
— *trajet* S_2O' : $t_2 = \dfrac{S_2O' - e}{c} + \dfrac{e}{V}$ *en supposant que la lumière traverse à peu près normalement la lame. Nous avons aussi supposé que toutes les radiations avaient dans la lame à peu près la même vitesse* V.

En remarquant que l'indice

$$n = \frac{c}{V} \Longrightarrow t_2 = \frac{S_2O'}{c} - \frac{e}{c} + \frac{ne}{c}$$

d'où $$t_2 = \frac{S_2O' + (n - 1)e}{c}.$$

En comparant t_2 *et* t_1 *et comme* $S_2O' = S_1O'$ *nous voyons que tout se passe comme si la lame rallongeait le trajet de* $\delta_0 = (n - 1)e = (1{,}5 - 1) \times 2 = 1\mu$.



● *Soit un point* M *situé à la distance* x *de* O′. M *étant du côté de* S_1, *la différence de marche, en* M, *est* $\delta = \dfrac{ax}{D} + \delta_0$, *si on mesure* x *en* μ ; *comme* $\dfrac{a}{D} = \dfrac{1}{3\,000}$, $\delta = \dfrac{x}{3\,000} + 1\ (\mu)$.

● *Une radiation de longueur d'onde* λ *donne une frange obscure en* M, *c'est-à-dire une cannelure dans le spectre donné par le spectroscope placé en* M, *si la différence de marche*

CORRIGÉ $\delta = (2k + 1)\dfrac{\lambda}{2}$; $k \in N$. *Il faut donc chercher pour chaque valeur de* x *le nombre de valeurs de* k *(entier positif) telles qu'à la fois* $\delta = \dfrac{x}{3\,000} + 1$ et $\delta = (2k + 1)\dfrac{\lambda}{2}$. *Proposons la solution graphique suivante : (à faire sur papier millimétré).*

— *Soit l'axe des ordonnées. Sur cet axe définissons deux repères* (Ω) *et* (Ω'). *L'un permet de repérer* δ ($\delta = 0$ *en* Ω), *l'autre permet de repérer* x ($x = 0$ *en* Ω'), *comme* $\delta = \dfrac{x}{3\,000} + 1$, *nous voyons que pour* $x = 0$ *le point* Ω' *est caractérisé dans le repère* (Ω) *par* $\delta = 1\mu$. (*Pour* $\delta = 2\mu$ $x = 3\,000\mu$.)

— *Traçons dans le système d'axes* $\overrightarrow{\Omega\delta}$ *et* $\overrightarrow{\Omega\lambda}$ *la série de segments de droites définis par* $\delta = (2k + 1)\dfrac{\lambda}{2}$, *avec* $k \in N$ et $0{,}4\mu \leqslant \lambda \leqslant 0{,}8\mu$. *Ainsi le premier a pour équation* $\delta = \dfrac{\lambda}{2}(k = 0)$, *puis le deuxième* $\delta = 3\dfrac{\lambda}{2}(k = 1)$...

— *Il suffit pour avoir le nombre de cannelures en fonction de* x *de déterminer le nombre de points d'intervention de la droite* x *avec l'ensemble de ces segments : en effet pour chaque point d'intersection toutes les conditions* $\delta = \dfrac{x}{3000} + 1$, $\delta = (2k + 1)\dfrac{\lambda}{2}$ $k \in N$ *et* $0{,}4 < \lambda < 0{,}8$ *sont satisfaites.*

— *On trouve ainsi :*

$x \in [0{,}600\ \mu]$	2 cannelures	$x \in [2\,400\mu, 3\,000\ \mu]$	3 cannelures
$x \in\ ]600\ \mu, 1\,200\mu[$	1 cannelure	$x \in\ ]3\,000\mu, 3\,600\ \mu[$	2 cannelures
$x \in [1200\ \mu, 2\,400\mu[$	2 cannelures	$x \in [3\,600\mu, 4\,500\ \mu]$	3 cannelures

Contrôles

Pb 36 à Pb 38

Contrôle n° 1. Pour réaliser des interférences lumineuses, on dispose de deux sources (F_1) et (F_2) monochromatiques, cohérentes et en phase, linéaires et parallèles, dont les milieux F_1 et F_2 sont distants de $a = 0{,}5$ mm. Les points F_1 et F_2 sont situés dans le plan de la figure, celui-ci étant perpendiculaire à (F_1) et à (F_2). Le plan d'observation E, parallèle au plan des sources, est situé à la distance D = 1 m de ce plan; la perpendiculaire en O, milieu de F_1F_2, au plan des sources rencontre l'écran E en A.

❶ Décrire un dispositif autre que le dispositif d'Young permettant de réaliser les sources (F_1) et (F_2) à partir d'une fente fine (F) éclairée en lumière monochromatique.
Faire le schéma des faisceaux lumineux dans le plan perpendiculaire à la fente (F) et contenant F_1F_2.
Préciser ce que l'on observe alors sur E.

❷ Définir l'interfrange i; déterminer sa valeur pour la longueur d'onde $\lambda = 0{,}500\ \mu$ de la radiation lumineuse utilisée.

❸ Quelle est la distance $x = AP$ pour laquelle on observe sur E une frange brillante P d'ordre 5 (la frange brillante centrale est par définition la frange d'ordre 0)?

❹ On utilise maintenant une lumière monochromatique de longueur d'onde λ'. On observe sur l'écran E un nouvel ensemble de franges et l'on constate que la cinquième frange noire à partir de la frange centrale brillante prend la place de la frange brillante d'ordre 5 de la question ❸ Calculer λ'.

❺ (F) est maintenant éclairée en lumière blanche. Décrire l'aspect observé sur l'écran.
Quelles sont les longueurs d'onde des radiations visibles pour lesquelles il y a frange obscure à la distance 5 mm du milieu de la frange centrale?
On rappelle que les longueurs d'onde des radiations visibles sont comprises entre 0,4 μ et 0,8 μ.
(Bac.)

Contrôle n° 2. On réalise l'expérience classique des fentes d'Young en éclairant, avec une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0{,}6\ \mu$ le dispositif suivant : S est une fente située à 50 cm d'un plan P contenant deux fentes S_1 et S_2 parallèles, séparées par une distance $a = 1{,}2$ mm, équidistantes de S. (Ces deux fentes éclairées sont équivalentes à deux sources synchrones, de même phase et de même intensité.) On dispose un écran E, parallèle au plan P et distant de celui-ci de 2 m.

❶ Qu'observe-t-on sur l'écran E? Calculer l'interfrange i, et les abscisses, z des franges obscures mesurées à partir de O', point de rencontre de la médiatrice de S_1S_2 et de l'écran.

❷ Derrière la fente S_1, on place une lame en verre L d'indice relatif par rapport à l'air $n = 1{,}524$ et d'épaisseur e inconnue. On observe sur E un déplacement (dont on précisera le sens) du système d'interférences, déplacement égal à 12,5 interfranges. En déduire l'épaisseur e, de la lame L. Entre quelles valeurs cette épaisseur est-elle comprise si le déplacement est mesuré avec une incertitude de 0,1 interfrange, l'indice avec une incertitude absolue de 0,003 et la longueur d'onde avec une précision de 2 %?

❸ De combien et dans quel sens faudrait-il déplacer S dans son plan et parallèlement à elle-même, pour ramener la frange centrale en O'?

❹ Revenant au dispositif initial (lame enlevée), on utilise une lumière blanche composée de toutes les radiations dont les longueurs d'onde sont comprises entre 0,40 μ et 0,75 μ.
Qu'observe-t-on sur l'écran E? Quelles sont les radiations qui forment une frange obscure en un point situé à 7,5 mm de O'? *(Bac.)*

Contrôle n° 3. Deux miroirs plans de forme rectangulaire OM_1 et OM_2 sont accolés par un côté. Le dièdre ainsi formé a pour valeur ($\pi - \alpha$) radians et son arête est horizontale. Une fente lumineuse F très fine, horizontale, est placée à hauteur suffisante pour qu'aucun rayon réfléchi

par OM_1 n'atteigne OM_2. Soit F_1 et F_2 les images de F données respectivement par OM_1 et OM_2. La dimension OM_2 est supposée assez grande pour que la direction F_2M_2 ne rencontre aucun des rayons réfléchis par OM_1. De même la dimension OM_1 est telle que la direction F_1M_1 ne rencontre aucun des rayons réfléchis par OM_2.

A. On demande de faire la figure en indiquant les limites de l'espace où l'on peut, en y plaçant un écran, observer des franges d'interférences, l'écran étant parallèle à F_1F_2 et perpendiculaire au plan de la figure.

B. On opère en lumière monochromatique de longueur d'onde λ. On pose $FO = d_1$ et on appelle d_2 la distance de O à l'écran. Calculer en fonction de α, d_1 d_2 et λ :

1. L'interfrange, c'est-à-dire la distance séparant deux maximums consécutifs de lumière sur l'écran (ou deux minimums consécutifs).

2. La largeur $2\,l$ de l'écran sur laquelle on observe des franges.

3. Le nombre n d'interfranges (à une unité près).

4. Etablir la relation très simple entre d_1 et d_2 pour laquelle n est maximal quand on fait varier d_1 et d_2 de façon que

$$d_1 + d_2 = D$$

reste constant.

5. Calculer la valeur de n et celle de l'interfrange dans le cas où $d_1 = d_2 = 1$ m, $\lambda = 0{,}5\ \mu$ et où α prend successivement les valeurs $\frac{1}{1\,000}$ radian et $\frac{5}{1\,000}$ radian.

6. Trouver l'expression de la limite vers laquelle tend la valeur de n quand, avec d_1 donné, on fait croître d_2 indéfiniment. Déterminer la valeur de α pour que cette limite de n soit égale à 2 quand $d_1 = 1$ m et $\lambda = 0{,}5\ \mu$. *(Partie Bac.)*

Contrôle n° 4.

1. Une source ponctuelle est placée à $d = 50$ cm de l'arête O de deux miroirs de Fresnel. Un écran E est à $d' = 1$ m de O. La source monochromatique émet une radiation de longueur d'onde $\lambda = 0{,}8\ \mu$. On veut obtenir sur l'écran une interfrange égale à 1 mm. Quelle doit être la distance entre les images S_1 et S_2 de S?

2. Les deux miroirs sont sur un plan horizontal, une cale soulève l'extrémité M_2 du second miroir, de largeur $OM_2 = 5$ cm. Déterminer l'épaisseur de la cale e.

Contrôle n° 5. On réalise le dispositif d'Young : une fente fine S, éclairée par la lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 0{,}5893\ \mu$, est placée à égale distance de deux fentes fines S_1 et S_2, parallèles entre elles et à S, percées dans un écran e et dont l'écartement est 1 mm.

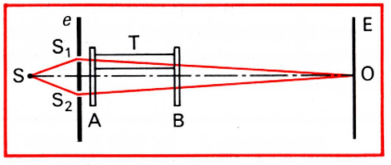
1. On observe des franges d'interférence sur un écran E, parallèle à e et situé à 2 m de celui-ci. Quelle est la valeur de l'interfrange?

2. On introduit sur le trajet du faisceau issu de S_1 un tube fermé par deux glaces plan-parallèles A et B, de dimensions telles qu'elles soient aussi traversées par les rayons provenant de S_2.

a) Le tube T étant en communication avec l'extérieur, qu'observe-t-on sur l'écran E?

b) On fait le vide dans le tube T. Que devient le système de franges précédent?

c) La longueur du tube T étant de 20 cm, à 1 mm près, déterminer la valeur de l'indice absolu de l'air dans les conditions de l'expérience, sachant que, pendant le pompage, on a vu défiler 99 franges brillantes au centre O de la figure d'interférences initiale et que, l'opération terminée, on observe en ce point une frange sombre.



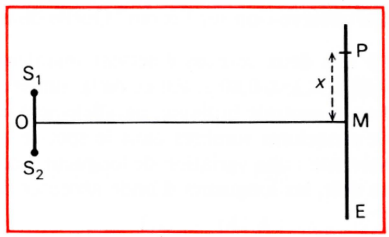
Avec quelle précision cet indice est-il déterminé, sachant qu'on apprécie la position des franges à 1/4 d'interfrange près?

❸ On substitue au monochromateur une source de lumière blanche et à l'écran E la fente d'un spectroscope, placée en O parallèlement aux fentes S_1 et S_2. Le vide ayant été fait dans le tube T, qu'observe-t-on dans le spectroscope ?
On admettra que l'indice de réfraction de l'air a la même valeur pour toutes les radiations. Limites du spectre visible : 0,4 et 0,8 μ. *(Bac.)*

Contrôle n° 6.

A. Deux sources lumineuses identiques, S_1 et S_2, synchrones et cohérentes (vibrant en phase), émettent chacune une radiation monochromatique de longueur d'onde λ et d'amplitude prise conventionnellement égale à l'unité. On observe des interférences sur un écran E perpendiculaire au plan médiateur du segment S_1S_2 et situé à une distance D des deux sources. La position d'un point P de l'écran est repérée par sa distance x au plan médiateur de S_1S_2. On pose

$$S_1S_2 = a.$$



❶ Calculer la différence de marche $\delta(x, a, D)$ au point P. On suppose que x reste petit devant D ($x \ll D$).

❷ Calculer l'éclairement $I(a, x, D, \lambda)$ de l'écran au point P. On rappelle que l'éclairement de l'écran en P est proportionnel au carré de l'amplitude lumineuse résultante en ce point. Montrer que, lorsque l'on se déplace sur E, l'intensité passe alternativement par une valeur maximale, I_M, et une valeur minimale, I_m, que l'on calculera.

❸ Tracer le graphe donnant les variations de I avec x. En déduire la valeur de l'interfrange $i(a, D, \lambda)$ et la calculer numériquement pour

$$\lambda = 0{,}5\ \mu, \qquad a = 1\ \text{mm} \qquad \text{et} \qquad D = 3\ \text{m}.$$

B. Les deux sources S_1 et S_2 émettent maintenant chacune deux radiations monochromatiques, de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 très voisines :

$$\lambda_1 = \lambda + \frac{\Delta\lambda}{2} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \lambda - \frac{\Delta\lambda}{2} \qquad (\Delta\lambda \ll \lambda).$$

Ces deux radiations ont même amplitude, prise égale à l'unité.

❶ Calculer, en P, les éclairements I_1 et I_2 correspondant aux deux systèmes de franges relatifs à λ_1 et λ_2. En déduire l'éclairement résultant, I, au point P.

❷ Utilisant la formule

$$\cos\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}(\cos p + \cos q)$$

et tenant compte de l'approximation $\Delta\lambda \ll \lambda$, mettre I sous la forme

$$I(x) = 2\left[1 + A(x)\cos\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right],$$

où $A(x)$ est une fonction variant lentement avec x, fonction que l'on déterminera.

❸ Tracer sommairement le graphe donnant les variations de $I(x)$ avec x. Montrer ainsi que l'on a un phénomène de « battements », les franges disparaissant périodiquement lorsque l'on se déplace sur E.
Calculer numériquement la période de disparition des franges pour
$\lambda = 0{,}5\ \mu$, $a = 1$ mm, $D = 3$ m et $\Delta\lambda = 0{,}025\ \mu$. *(Bac.)*

Contrôle n° 7. A l'aide de deux sources cohérentes, ponctuelles, en phase, S_1 et S_2, on obtient sur un écran parallèle à S_1S_2 situé à $D = 2$ m de S_1S_2 des franges d'interférences.

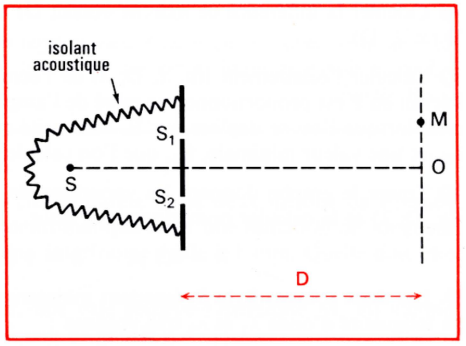
❶ On éclaire en lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0{,}60\ \mu$. La distance qui sépare les milieux de deux franges sombres voisines est 0,8 mm. Quelle est la distance séparant S_1 de S_2.

❷ Le champ d'interférences a pour largeur 2,2 cm. Combien y a-t-il de franges obscures?

❸ Les deux sources émettent simultanément deux radiations de longueur $\lambda_1 = 0{,}60\ \mu$ et $\lambda_2 = 0{,}54\ \mu$. Qu'observe-t-on sur l'écran? Quelle distance sépare deux coïncidences successives?

❹ Les deux sources émettent maintenant de la lumière telle que $0{,}40\ \mu \leqslant \lambda \leqslant 0{,}60\ \mu$ et $0{,}68\ \mu \leqslant \lambda \leqslant 0{,}80\ \mu$. Est-ce de la lumière blanche? On dispose en P, situé à 6 mm du milieu de la frange centrale brillante, parallèlement aux franges, la fente d'un spectroscope. Combien y a-t-il de cannelures sombres dans le spectre observé? Dessiner le spectre obtenu. On prendra l'échelle suivante : une variation de longueur d'onde égale à $0{,}1\ \mu$ s'étale sur 2 cm. On indiquera surtout, en noir, les longueurs d'onde absentes dans le spectre.

Contrôle n° 8. Un sifflet S émet un son sinusoïdal de fréquence N. Il est situé derrière un écran percé de deux trous S_1 et S_2 On admettra que S_1 et S_2 se comportent comme deux sources sonores cohérentes. On donne $N = 13\,600$ Hz. $S_1S_2 = 0{,}5$ m. La vitesse du son dans les conditions de l'expérience est $V = 340$ m/s.
Un observateur M se déplace parallèlement à S_1S_2, à la distance $D = 5$ m de S_1S_2. Montrer qu'il perçoit des sons d'intensité maximale et d'intensité minimale. Quelle est l'équidistance entre deux zones d'intensité sonore maximale (l'observateur restant au voisinage de O)?



Courants alternatifs

Pb 39 à Pb 43

■ **Conseils généraux** : voir tableaux comparatifs (Physique pages 193 et 194).
Les élèves de D ne feront que le n° 121 et le contrôle n° 1.

---

n° 121.

ÉNONCÉ

❶ Une prise maintient entre ses bornes une tension $u = 141{,}4 \sin 100\pi t$ volts. Quelle est la fréquence de cette tension, la tension efficace U ?

CORRIGÉ

● *La pulsation* $\omega = 100\ \pi$ rd/s *comme* $\omega = 2\ \pi N \Longrightarrow N = \dfrac{\omega}{2\pi} = 50$ Hz.

● *La tension maximale* $U_m = 141{,}4$ V, *la tension efficace* $U = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}} = \dfrac{141{,}4}{\sqrt{2}} = 100$ V.

ÉNONCÉ

❷ On branche entre les bornes de la prise, une résistance pure R, l'intensité efficace qui traverse R est 5A. Calculer R.

CORRIGÉ

$U = RI \quad R = \dfrac{U}{I} = \dfrac{100}{5} = 20\Omega$. *Remarquons qu'alors l'intensité instantanée est en phase avec* u *et a pour équation horaire* $i = 5\sqrt{2} \sin 100\pi t$.

ÉNONCÉ

❸ On branche entre les bornes de la prise une bobine d'inductance $L = 10^{-1}$ Henry, de résistance $R = 20\Omega$. Calculer l'intensité efficace I. $\pi^2 \simeq 10$.

CORRIGÉ

L'impédance de la bobine est $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = \sqrt{400 + 10^{-2} \times 10^4\pi^2} = \sqrt{1\,400} = 37{,}4\Omega$.

L'intensité efficace $I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{100}{37{,}4} = 2{,}68$ A.

ÉNONCÉ

❹ On branche entre les bornes de la prise un condensateur de capacité $C = 10^{-4}$ Farad. Calculer l'intensité efficace.

CORRIGÉ

L'impédance du condensateur est $Z = \dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{1}{10^{-4}.100\pi} = \dfrac{10^2}{\pi}\Omega$.

L'intensité efficace $I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{100}{100}\pi = 3{,}14$ A.

ÉNONCÉ

❺ On branche entre les bornes, le condensateur et la bobine précédente en série. Montrer qu'alors le circuit est à la résonance, en déduire son impédance et l'intensité efficace qui le traverse.

CORRIGÉ

● *A la résonance* $L\omega = \dfrac{1}{C\omega} \Longrightarrow LC\omega^2 = 1$, *vérifions que cette condition est satisfaite :*

$10^{-1} \times 10^{-4} \times (100\pi)^2 = 1$ *(en prenant* $\pi^2 = 10$*)*.

● *Nous savons qu'à la résonance* $Z = R = 20\Omega$. *Par suite* $I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{100}{20} = 5$ A.

Remarquons que i *est alors en phase avec* u.

ÉNONCÉ

❻ On place en série une bobine d'inductance $L = 10^{-3}$ H et un condensateur de capacité $C = 10^{-6}$F. Pour quelle fréquence le circuit entrera-t-il en résonance ?

CORRIGÉ

Soit N *la fréquence, il lui correspond la pulsation* $\omega = 2\pi N$. *Le circuit devant être accordé,* L, C *et* ω *doivent satisfaire la condition de résonance :*

$$LC\omega^2 = 1 \Longrightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{10^{-3}.10^{-6}} = 10^9 ; 4\pi^2N^2 = 10^9 \Longrightarrow N = 5\,000 \text{ Hz}.$$

---

n° 122.

ÉNONCÉ

❶ Une bobine est soumise à une tension constante $U_1 = 20$ V, l'intensité du courant est alors $I_1 = 2{,}5$ A. Ensuite on lui applique une tension sinusoïdale, de valeur efficace $U_2 = 17{,}8$ V, de fréquence 50 Hz, l'intensité efficace est alors $I_2 = 2$ A. Evaluer la résistance R et l'inductance L de cette bobine.

CORRIGÉ

● *En courant continu permanent, la f.e.m. d'auto-induction est nulle, d'après la loi d'Ohm*

$$U_1 = RI_1 \Longrightarrow R = \frac{U_1}{I_1} = 8\Omega.$$

● *En courant alternatif* $U_2 = ZI_2$, *d'où l'impédance* Z *de la bobine :*

$$Z = \frac{U_2}{I_2} = \frac{17{,}8}{2} = 8{,}9\Omega, \quad \textit{comme} \quad Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \Longrightarrow L\omega = \sqrt{Z^2 - R^2} = 3{,}9\Omega$$

d'où $L = \dfrac{3{,}9}{100\pi} = 1{,}24.10^{-2}$ H.

ÉNONCÉ

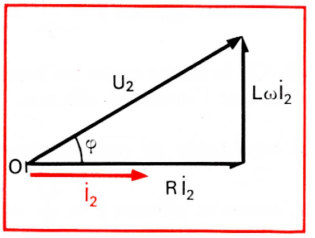
❷ Quel est le déphasage φ du courant par rapport à la tension sinusoïdale ?

CORRIGÉ

Traçons le diagramme de Fresnel de $u_2 = Ri_2 + L\dfrac{di_2}{dt}$, *nous avons donné aux vecteurs de Fresnel des modules égaux aux valeurs efficaces.*

$\left(L\dfrac{di_2}{dt}\right.$ *se représente par un vecteur en avance de* $\dfrac{\pi}{2}$ *sur* i_2, *de longueur* $\left.L\omega I_2\right)$.

On voit que l'intensité est en retard sur la tension d'un angle φ *tel que* $\text{tg}\,\varphi = \dfrac{L\omega}{R} = \dfrac{3{,}9}{8} = 0{,}487 \quad \varphi = 26°$.



ÉNONCÉ

❸ Quelle est la puissance électrique dépensée dans la bobine dans chaque cas ? En quelle forme d'énergie est transformée l'énergie électrique ?

CORRIGÉ

● *en courant continu* $P_1 = U_1I_1 = 50$ W : *l'énergie est transformée en chaleur par effet Joule* ($P_1 = U_1I_1 = RI_1^2$).

● *en courant alternatif* $P_2 = U_2I_2 \cos\varphi = 17{,}8 \times 2 \times \cos 26° = 32$ W, *là encore l'énergie est transformée en chaleur, d'ailleurs comme*

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \textit{ et que } Z = \frac{U}{I} \Longrightarrow P_2 = RI_2^2 = 32 \text{ W}.$$

ÉNONCÉ

❹ On enfonce dans la bobine un noyau de fer doux qui multiplie l'inductance de la bobine par 100. Que deviennent l'intensité efficace et le déphasage φ ?

CORRIGÉ

● $L = 1{,}24$ H; $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{L\omega}{R} = \dfrac{1{,}24.100\pi}{8} = \dfrac{390}{8} \simeq 49$ φ *est voisin de* 89°.

Nous voyons donc que R *devient négligeable devant* $L\omega$

$$Z \simeq L\omega \qquad I \simeq \frac{U}{L\omega} = 4{,}5 10^{-2}\ \text{A}.$$

La bobine est alors pratiquement une inductance pure.

ÉNONCÉ

❺ On retire le noyau de fer et on plonge la bobine dans un calorimètre de capacité thermique 300 cal/°C. Au bout de quelle durée la température du calorimètre s'élève-t-elle de 20 °C ? (La capacité est la valeur en eau en grammes.)

CORRIGÉ

● *Pour élever la température du calorimètre de* 20 °C, *il faut lui fournir :*

$300 \times 20 = 6\,000$ cal; *soit* $W = 6\,000 \times 4{,}19 = 25.10^3$ J.

● *Soit* t *la durée du passage du courant :*

$$P_2 = \frac{W}{t} \Longrightarrow t = \frac{W}{P_2} = 780\ \text{s} = 13\ \text{mn}.$$

ÉNONCÉ

n° 123. Une bobine est constituée par $\ell = 5$ m de fil conducteur enroulé sur un noyau de fer, cylindrique, de perméabilité moyenne $\mu = 10^3$, la longueur de cette bobine est $\ell' = 50$ cm. La résistivité du conducteur est $\rho = 2.10^{-6}\ \Omega.\text{m}$.

❶ Evaluer l'inductance L de cette bobine.

CONSEIL

Désigner par *r* le rayon d'une spire, faire un calcul littéral, on verra que *r* s'élimine.

CORRIGÉ

Soit r *le rayon d'une spire, le nombre de spires est* $N = \dfrac{\ell}{2\pi r}$.

Lorsqu'il passe un courant d'intensité I, *le solénoïde produit l'induction* $B_0 = 4.\pi.10^{-7}\dfrac{NI}{\ell'}$,

dans le noyau l'induction est $B = \mu B_0$, *d'où le flux à travers le solénoïde* $\Phi = B.\pi r^2.N$,

comme $L = \dfrac{\Phi}{I}$ · *on en déduit :*

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu.4\pi.10^{-7}\frac{\ell}{2\pi r\ell'}\pi r^2\frac{\ell}{2\pi r} = \mu.10^{-7}\frac{\ell^2}{\ell'} = \frac{10^3.10^{-7}.5^2}{0{,}5} = 5.10^{-3}\ \text{H} = 5\ \text{mH}.$$

ÉNONCÉ

❷ Cette bobine est soumise à une tension sinusoïdale de fréquence 500 Hz, le courant est en retard de 57°30′ sur la tension. Quelle est la section du fil conducteur.

CONSEIL

Evaluer la résistance R.

CORRIGÉ

Si φ *est le retard angulaire de l'intensité sur la tension, nous savons que pour une résistance inductive* $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{L\omega}{R}$ *d'où* $R = \dfrac{L\omega}{\operatorname{tg}\varphi} = \dfrac{5.10^{-3}.10^3\pi}{1{,}57} = 10\ \Omega$.

Soit s *la section du fil :* $R = \rho\dfrac{\ell}{s} \Longrightarrow s = \dfrac{\rho\ell}{R} = \dfrac{2.10^{-6}.5}{10} = 10^{-6}\text{m}^2$ *soit* 1 mm².

ÉNONCÉ

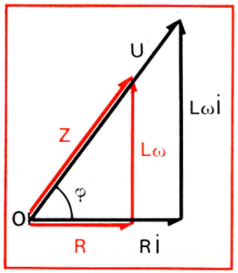
n° 124. Une prise maintient entre ses bornes la tension $u = 10\sqrt{2}\sin 100\,\pi t$ (volts).

❶ Cette tension est appliquée à une bobine B, l'intensité efficace du courant est alors I = 0,55 A, le courant est déphasé de 60° par rapport à la tension.
Déterminer la résistance R et l'inductance L de la bobine.
N.B. : Tous les calculs numériques seront faits à 1 % près.

CORRIGÉ

● *La tension efficace* $U = 10$ V, $I = 0{,}55$ A *par suite* $U = ZI \Longrightarrow Z = \dfrac{U}{I} = \dfrac{10}{0{,}55} = 18{,}2\ \Omega$.

● *Traçons le diagramme de Fresnel représentant* $u = Ri + L\dfrac{di}{dt}$, *et le diagramme d'impédance (en rouge) obtenu en divisant les modules des vecteurs de Fresnel par* I. $\left(L\dfrac{di}{dt}\right.$ *est en avance de* $\dfrac{\pi}{2}$ *sur* i, *de longueur* $\left.L\omega I\right)$.



Sur ce diagramme, on peut évaluer R *et* L *en fonction de* Z *et* φ :

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \Longrightarrow R = Z\cos\varphi = 18{,}2 \cdot 0{,}5 = 9{,}1\ \Omega.$$

$$\sin\varphi = \frac{L\omega}{Z} \Longrightarrow L\omega = Z\sin\varphi = 15{,}7\ \Omega \Longrightarrow L = \frac{15{,}7}{100\pi} = 5.10^{-2}\ \text{H}.$$

ÉNONCÉ

❷ Aux bornes de la prise, on place en série un condensateur de capacité C = 203 μF et une résistance pure R′ = 27,2 Ω. Comment s'exprime l'intensité instantanée *i′* ?

CONSEIL

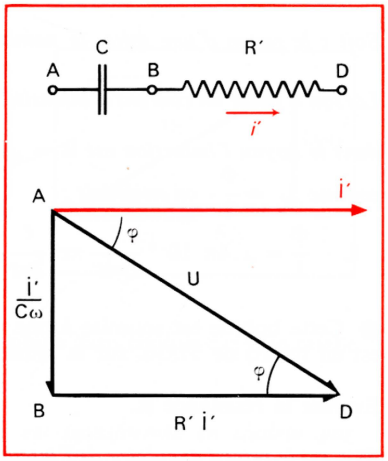
Ecrire la loi des tensions. La même intensité passe dans C et R′, le vecteur de Fresnel représentant *i′* est le « point de départ » de la construction.

CORRIGÉ

● $(v_A - v_D) = u$

$u = (v_A - v_D) = (v_A - v_B) + (v_B - v_D)$

$u = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i'dt + R'i'$, *on en déduit le diagramme de Fresnel* $\left[\dfrac{1}{C}\displaystyle\int i'dt\right.$ *se représente par un vecteur en retard de* $\dfrac{\pi}{2}$ *sur* i′, *de longueur* $\left.\dfrac{I'}{C\omega}\right]$.



● *On en déduit* $U^2 = I'^2\left(\dfrac{1}{C^2\omega^2} + R'^2\right)$.

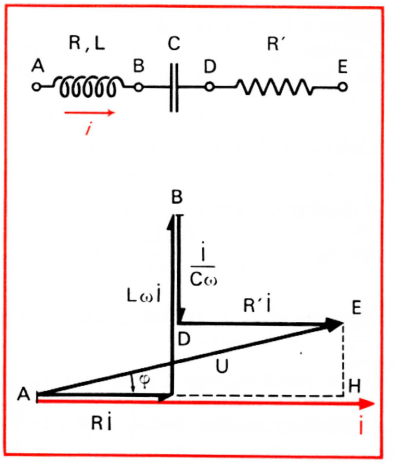
Calculons $\dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{1}{203.10^{-6} \times 100\pi} = 15{,}7\ \Omega$ *(c'est l'impédance du condensateur) d'où* $I' = \dfrac{10}{\sqrt{15{,}7^2 + 27{,}2^2}} = 0{,}318$ A.

● *Déterminons l'avance angulaire de* i′ *sur* u : $\text{tg}\,\varphi = \dfrac{1}{R'C\omega} = 0{,}577 \qquad \varphi = 30° = \dfrac{\pi}{6}\text{rd}$.

● *Finalement* $i' = 0{,}318\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

3 On soumet maintenant à la tension u la bobine B, le condensateur C et la résistance R′ montés en série. Comment s'exprime l'intensité instantanée i? Quelle est la tension efficace aux bornes de chaque appareil?

ÉNONCÉ



● $(v_A - v_E) = u$

$u = (v_A - v_B) + (v_B - v_D) + (v_D - v_E)$

$= Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt + R'i\left(L\frac{di}{dt}\right.$ *se représente par un vecteur en avance sur* i *de* $\frac{\pi}{2}$, *de longueur* $L\omega I$; $\frac{1}{C}\int idt$ *par un vecteur en retard de* $\frac{\pi}{2}$ *sur* i, *de longueur* $\left.\frac{I}{C\omega}\right)$, *on en déduit le diagramme de Fresnel*

● *Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle* AHE :

$$U^2 = I^2\left[(R + R')^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right].$$

CORRIGÉ

$R + R' = 36{,}3\ \Omega$ $\quad L\omega = 5.10^{-2} \times 100\pi = 15{,}7\Omega$ $\quad \frac{1}{C\omega} = 15{,}7\ \Omega$, *par suite* $L\omega = \frac{1}{C\omega} = 0$ *le circuit est à la résonance. (Le diagramme tracé est inexact pour les besoins de la démonstration, il est conseillé d'après le résultat précédent d'en refaire un, exact :* $\overrightarrow{AE}$ *colinéaire avec* $\vec{I}$, *le déphasage entre* i *et* u *est nul).*

Par suite $I = \frac{U}{R + R'} = \frac{10}{36{,}3} = 0{,}276$ A.

● *Finalement* $i = 0{,}276\sqrt{2}\sin 100\ \pi t$.

● *Evaluons les tensions efficaces aux bornes :*

— *de la bobine :* $U_B = ZI$ ($Z = 18{,}2\Omega$ 1re *question*) *d'où* $U_B = 18{,}2 \times 0{,}276 = 5{,}02$ V.

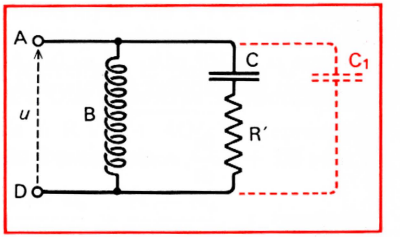
— *du condensateur* $U_C = Z'I$ ($Z' = 15{,}7\ \Omega$ 2e *question*) *d'où* $U_C = 15{,}7 \times 0{,}276 = 4{,}33$ V

— *de la résistance* $U_{R'} = R'I = 27{,}2 \times 0{,}276 = 7{,}50$ V

Notons qu'il n'y a pas de surtension, la résistance du circuit étant trop importante.

4 La tension u est appliquée au montage figuré ci-contre : (en noir) la bobine B de la 1re question, le condensateur C et la résistance R′ de la 2e question. Quelle est l'expression du courant principal i_p? On monte ensuite en dérivation, un condensateur de capacité C_1 (en pointillés rouges), de telle sorte que i'_p soit en phase avec u. Evaluer C_1. Montrer que l'ensemble des trois dérivations est équivalent à une résistance r, évaluer r.

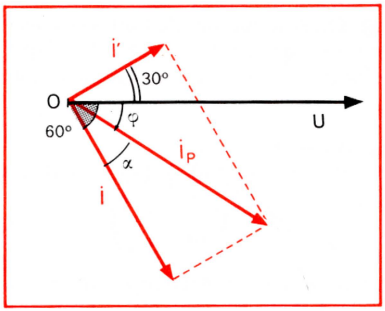
ÉNONCÉ



Ecrire la loi des intensités. La même tension u est appliquée aux dérivations, son vecteur de Fresnel est le « point de départ » de la construction.

CONSEIL

● *Dans la bobine* B *passe le courant* i *donné à* 1re *question, en retard de* 60° *sur* u, *d'intensité efficace* I = 0,55 A
Dans C *et* R′, *passe le courant* i′ *déterminé à la* 2e *question, en avance de* 30° *sur* u, *d'intensité efficace* I′ = 0,318 A.
Comme $i_p = i + i'$ *on en déduit le diagramme de Fresnel, qui est un rectangle, d'où*



$$I_p = \sqrt{I^2 + I'^2} = 0{,}636 \text{ A}$$

Calculons le retard angulaire φ *de* i_p *sur* u :

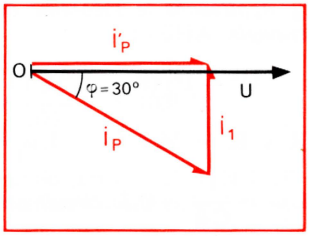
$$\varphi = 60 - \alpha$$

α *déphasage entre* i_p *et* i *qu'on évalue facilement par* $\text{tg } \alpha = \dfrac{I'}{I} = \dfrac{0{,}318}{0{,}55} = 0{,}577$, *d'où* $\alpha = 30^\circ \Longrightarrow \varphi = 30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$ rd.

Finalement $i_p = 0{,}636\sqrt{2} \sin\left(100\pi t - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

CORRIGÉ

● *Le condensateur* C_1 *est traversé par un courant* i_1 *en quadrature avance sur* u, *d'intensité* $I_1 = \dfrac{U}{Z_1} = UC_1\omega$.



Evaluons I_1 *pour que* i'_p *soit en phase avec* u.
L'intensité principale $i'_p = i + i' + i_1 = i_p + i_1$, *nous savons que* I_1 *doit être telle que* i'_p *soit en phase avec* u, *dans ces conditions :*

$$\sin\varphi = \frac{I_1}{I_p} \Longrightarrow I_1 = I_p \sin\varphi = 0{,}636 \times \frac{1}{2} = 0{,}318 \text{ A}.$$

On en déduit donc en reportant dans $I_1 = UC_1\omega \Longrightarrow C_1 = 10^{-4}$ F.

● *L'intensité principale* i_p' *est en phase avec* u, *comme* I, I′, I_1', *sont proportionnels à* U, I'_p *l'est aussi. Le montage est donc équivalent à une résistance* r *telle que*

$$U = rI_p' \Longrightarrow r = \frac{U}{I_p'}.$$

Comme $I'_p = I_p \cos\varphi = 0{,}636 \times 0{,}866 = 0{,}551$ $\quad r = \dfrac{10}{0{,}551} = 18{,}2\Omega$.

---

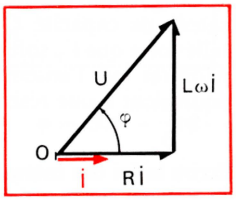
n° 125.

ÉNONCÉ

Un circuit électrique comporte : une bobine de résistance R = 10Ω, une source de tension $u = 50\sqrt{2} \sin \omega t$ (la pulsation ω est réglable), un ampèremètre donnant l'intensité efficace I, d'impédance négligeable.
Lorsque $\omega = 10^3$ rd/s I = 0,1 A. Calculer l'inductance de la bobine, le déphasage de la tension par rapport à l'intensité. Ecrire l'expression de l'intensité instantanée.

CORRIGÉ

● $u = Ri + L\dfrac{di}{dt}$, *construisons le diagramme de Fresnel* $\left(L\dfrac{di}{dt}\right.$ *se représente par un vecteur en avance de* $\dfrac{\pi}{2}$ *sur* i, *de longueur* $\left.L\omega I\right)$.



L'impédance de la bobine $Z = \dfrac{U}{I} = \dfrac{50}{0{,}1} = 500\Omega$, *d'après*

le diagramme $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ *d'où* $L\omega = \sqrt{Z^2 - R^2} \simeq 500\Omega$:

l'inductance est donc $L = \frac{500}{1\,000} = 0{,}5$ H.

CORRIGÉ

● $\text{tg}\,\varphi = \frac{L\omega}{R} = 50$, *le retard angulaire de* i *sur* u *est donc* $\varphi = 89° = 1{,}55$rd. *l'inductance est donc pratiquement pure.*

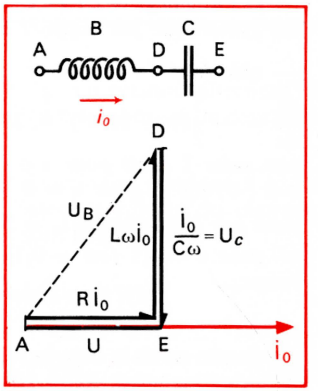
● *Finalement* $i = I\sqrt{2}\,\sin(\omega t - \varphi) = 0{,}1.\sqrt{2}\,\sin(10^3 t - 1{,}55)$.

ÉNONCÉ

❷ Quelle capacité C faut-il placer en série avec la bobine pour que l'intensité soit en phase avec la tension *u* aux bornes de l'ensemble ? Quelle est alors l'intensité efficace I_0 ? Déterminer les tensions efficaces U_B et U_C aux bornes de la bobine et de la capacité. Evaluer le rapport $Q = \frac{U_C}{U}$. La pulsation reste égale à 10^3 rd/s.

CORRIGÉ

● *L'intensité* i *est en phase avec* u *lorsqu'il y a résonance, dans ces conditions* $L\omega = \frac{1}{C\omega}$, *la capacité* C *nécessaire est donc* $C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{0{,}5.10^6} = 2.10^{-6}\text{F} = 2\mu\text{F}$.



● *D'après le diagramme de Fresnel, nous voyons qu'à la résonance* $U = RI_0$, *(l'impédance du circuit* $Z = R$*) d'où* $I_0 = \frac{U}{R} = \frac{50}{10} = 5$A.

● *La tension efficace* U_B *entre* A *et* D *est* $U_B = ZI_0$, Z *étant l'impédance de la bobine calculée à la* 1re *question :* $Z \simeq 500\ \Omega$*) d'où* $U_B = 500 \times 5 = 2\,500$ V.

● *La tension efficace* U_C *entre* D *et* E *est* $U_C = \frac{1}{C\omega} I_0$ *d'où* $U_C = \frac{5}{2.10^{-6}.10^3} = 2\,500$ V. *(Nous remarquons donc que si la bobine est une impédance pure, à la résonance la tension aux bornes de cette bobine est égale à la tension aux bornes du condensateur.)*

● *Évaluons le rapport* $Q = \frac{U_C}{U} = \frac{1}{RC\omega}$, *comme nous sommes à la résonance* $\frac{1}{C\omega} = L\omega$, *le rapport est donc égal aussi à* $Q = \frac{L\omega}{R}$. *Numériquement* $Q = \frac{1}{10.2.10^{-6}.10^3} = 50$. *Ce coefficient mesure la surtension qui est dans ce cas très importante. On l'appelle le facteur de qualité du circuit.*

ÉNONCÉ

❸ Le circuit reste celui du ❷. On fait varier très légèrement la pulsation ω autour de ω_0. On posera $\omega = \omega_0(1 + \varepsilon)$. $\varepsilon \ll 1$. $\omega_0 = 10^3$ rd/s. Que représente ε ? Montrer que l'impédance du circuit est approximativement égale à $R\sqrt{1 + 4Q^2\varepsilon^2}$. Représenter graphiquement les variations de l'intensité efficace I en fonction de ε $\varepsilon \in \{-0{,}1\,;\,0{,}1\}$.

CORRIGÉ

● $\omega = \omega_0(1 + \varepsilon) \Longrightarrow \omega = \omega_0 + \omega_0\varepsilon \Longrightarrow \varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{N - N_0}{N}$, ε *représente donc la variation relative de fréquence.*

● *L'impédance du circuit* Z *est donnée par* $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$.

Evaluons $L\omega - \frac{1}{C\omega}$ *en fonction de* ε : $L\omega_0(1+\varepsilon) - \frac{1}{C\omega_0(1+\varepsilon)}$, *comme* $\varepsilon \ll 1$ $\frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon$, *l'expression devient*

$$L\omega_0(1+\varepsilon) - \frac{1}{C\omega_0}(1-\varepsilon) = \left(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right) + \varepsilon\left(L\omega_0 + \frac{1}{C\omega_0}\right)$$

comme ω_0 *correspond à la résonance* $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$, *l'expression devient* $2\varepsilon L\omega_0$.

Par suite $Z = \sqrt{R^2 + 4\varepsilon^2 L^2 \omega_0^2}$, *comme* $Q = \frac{L\omega_0}{R} \Longrightarrow Z = R\sqrt{1+4Q^2\varepsilon^2}$.

● *Evaluons* I *en fonction de* ε : $I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R\sqrt{1+4Q^2\varepsilon^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1+4Q^2\varepsilon^2}}$, *numériquement* $I_0 = 5A$ *(voir question 2)* $Q = 50$ $\quad I = \frac{5}{\sqrt{1+10^4\varepsilon^2}}$.

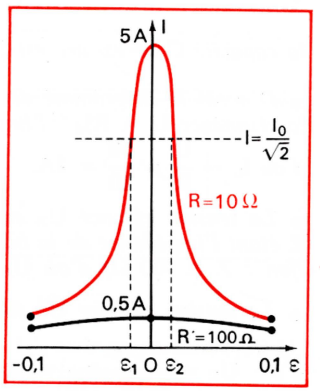
CORRIGÉ

● *Représentons graphiquement* $I = \frac{5}{\sqrt{1+10^4\varepsilon^2}}$.

— si on change ε *en* $-\varepsilon$, I *ne change pas : la courbe est symétrique par rapport à l'axe* $\varepsilon = 0$.

— calculons la dérivée : $I = 5\,(1+10^4\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}$, *d'où* $\frac{dI}{d\varepsilon} = -\frac{5}{2}(1+10^4\varepsilon^2)^{-\frac{3}{2}} . 2.10^4\varepsilon$; $\frac{dI}{d\varepsilon}$ *a le signe de* $-\varepsilon$, *par suite* I *croît pour* $\varepsilon \in \{-0{,}1;\ 0\}$ I *décroît pour* $\varepsilon \in \{0;\ 0{,}1\}$, *pour* $\varepsilon = 0$ *(résonance) l'intensité passe donc par le maximum* $I_0 = 5$ A.

— pour $\varepsilon = 0{,}1$ *(ou* $-0{,}1$*)* I $\simeq$ 0,5 A. *D'où le graphe rouge.*



ÉNONCÉ

❹ Quelle serait la courbe représentant l'intensité efficace en fonction de ε, si la résistance de la bobine valait $R' = 100\ \Omega$? L'inductance reste la même. Conclure.

CORRIGÉ

● *Dans ce cas le facteur de qualité est plus faible :*

$Q' = \frac{L\omega_0}{R'} = 5$, $\quad I = \frac{U}{R'\sqrt{1+4Q'^2\varepsilon^2}}$ *devient* $\quad I = \frac{0{,}5}{\sqrt{1+10^2\varepsilon^2}}$.

Traçons la courbe représentative (en noir) en tenant compte des résultats de la question 3,

pour $\varepsilon = 0$ $\quad I = 0{,}5$ A, *pour* $\varepsilon = 0{,}1$ *(ou* $-0{,}1$*)* $\quad I = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0{,}35$ A.

● *La courbe correspond à* $R' = 100\ \Omega$ *est beaucoup plus aplatie : la résonance est floue ; au contraire la courbe correspondant à* $R = 10\ \Omega$ *montre que la résonance est aiguë.*

ÉNONCÉ

❺ Soit P_0 la puissance électrique dépensée dans le circuit à la résonance. Montrer qu'il existe deux fréquences N_1 et N_2 pour lesquelles la puissance est réduite de moitié, U restant le même. Exprimer l'écart relatif $\frac{N_2 - N_1}{N_0}$ (largeur de bande) en fonction du facteur de surtension Q. Conclure.

• *La puissance moyenne* $P = U.I. \cos \varphi$ *uniquement consommée dans la résistance est aussi égale à* $P = RI^2$ *(qu'il y ait résonance ou non).*

• *D'où* $\frac{P}{P_0} = \frac{I^2}{I_0^2}$, *on veut que* $P = \frac{P_0}{2}$ *ce qui implique que* $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$.

En coupant le graphe par la droite $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$, *nous voyons qu'il y a deux racines pour* ε, *donc pour la fréquence* N. *Evaluons-les par le calcul. Il faut que* $I = \frac{I_0}{\sqrt{1 + 4Q^2\varepsilon^2}}$ *et que* $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

CORRIGÉ

d'où $1 + 4\,Q^2\varepsilon^2 = 2 \Longrightarrow \varepsilon_2 = +\frac{1}{2Q}$ *et* $\varepsilon_1 = -\frac{1}{2Q}$.

Comme $\varepsilon = \frac{N - N_0}{N_0}$ $\varepsilon_2 = \frac{N_2 - N_0}{N_0} = \frac{1}{2Q}$ (1) $\varepsilon_1 = \frac{N_1 - N_0}{N_0} = -\frac{1}{2Q}$ (2)

retranchons (2) *de* (1) *On en déduit* $\frac{N_2 - N_1}{N_0} = \frac{1}{Q}$. *La largeur de bande est l'inverse du facteur de qualité. Par suite plus une résonance est aiguë, plus les surtensions sont importantes, plus la largeur de bande est étroite.*

---

n° 126 (*d'après Bac.*). Une ligne de résistance R = 2 Ω amène un courant alternatif de fréquence 50 Hz à un compteur. La différence de potentiel efficace aux bornes du compteur sera supposée constante et égale à 120 V.

ÉNONCÉ

❶ Un appareil de chauffage branché après le compteur fonctionne pendant 5 h. Le compteur indique une consommation de 6 kWh. Calculer l'intensité efficace du courant. Quelle est la perte d'énergie dans la ligne. Les inductances sont négligeables.

CONSEIL

Evaluer la puissance en kW et le temps en *h*, l'énergie est alors en kWh.

• *Evaluons la puissance de l'appareil :* $\mathcal{P} = \frac{W}{t} = \frac{6}{5} = 1{,}2$ kW.

Comme $\mathcal{P} = U.I \cos \varphi$, *avec* $\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$ *puisque l'appareil est une résistance pure, on en déduit* $I = \frac{\mathcal{P}}{U} = \frac{1\,200}{120} = 10$ A.

CORRIGÉ

• *La ligne est une résistance pure qui consomme par effet joule l'énergie*

$$W' = RI^2t = 2.10^2.3\,600.5 = 3{,}6.10^6 \text{ J} = 1 \text{ kWh}.$$

❷ On remplace l'appareil de chauffage par un moteur qui fonctionne avec un facteur de puissance $\cos \varphi = 0{,}80$. Répondre aux mêmes questions, sachant qu'en 5 h, la consommation est aussi de 5 kWh.

ÉNONCÉ

• *La puissance électrique consommée est la même* $\mathcal{P} = 1{,}2$ kW; *comme* $\cos \varphi = 0{,}80$ *l'intensité*

$$I = \frac{\mathcal{P}}{U \cdot \cos \varphi} = \frac{1\,200}{120 \times 0{,}80} = 12{,}5 \text{ A}.$$

CORRIGÉ

• *Les pertes, par effet joule, en ligne sont :* $W' = RI^2t = 2.(12{,}5)^2.3\,600.5$ $= 1{,}56 \,.\, 3{,}6 \,.\, 10^6$ J *c'est-à-dire* $W' = 1{,}56$ kWh, *elles sont plus importantes le facteur de puissance étant plus faible.*

ÉNONCÉ

❸ Aux bornes du compteur, on met seulement un condensateur de 10 μF. Calculer l'intensité du courant, la perte en ligne pendant 5 h, et la consommation indiquée par le compteur pour ces 5 h.

CORRIGÉ

• *Soit* Z *l'impédance du condensateur,* $Z = \frac{1}{C\omega}$,

$$U = ZI \Longrightarrow I = \frac{U}{Z} = U.C.\omega = 120.10.10^{-6}.100\pi \qquad d'où \qquad I = 0{,}377 \text{ A}.$$

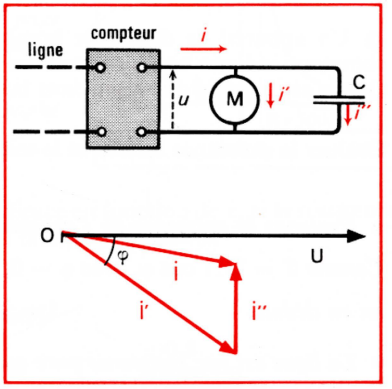
• *Les pertes, par effet joule, en ligne sont*

$$W' = RI^2t = 2.(0{,}377)^2.3\,600.5 = 1{,}42.3{,}6.10^3 \text{ J} = 1{,}42 \text{ Wh}.$$

• *La puissance moyenne consommée* $\mathcal{P} = UI\cos\varphi$ *est nulle : le courant est en avance de* $\frac{\pi}{2}$ *sur la tension, par suite* $\cos\varphi = 0$. *Le compteur indiquera donc une consommation nulle.*

ÉNONCÉ

❹ On branche de nouveau le moteur comme au ❷. Montrer que l'adjonction d'un condensateur, monté en parallèle, améliore le facteur de puissance contrôlée par le compteur. Pour quelle valeur C de la capacité le facteur de puissance est-il égal à 1 ?



CORRIGÉ

• *Soit* i *l'intensité consommée par l'installation sous la tension* u.

• *L'intensité* i' *dans le moteur a été déterminée à la* 2e *question :*
$I' = 12{,}5$ A, *le moteur comprend des enroulements inductifs, par suite* i' *est en retard sur* u *d'un angle* φ *tel que* $\cos\varphi = 0{,}80$.

• *L'intensité* i'' *dans le condensateur est en quadrature avance sur* u, *de valeur efficace*

$$I'' = \frac{U}{Z} = U.C\omega \qquad (1).$$

• *A chaque instant* $i = i' + i''$, *construisons le diagramme de Fresnel en plaçant les vecteurs représentant* i' *et* i'' *par rapport au vecteur représentant* u.

• *On voit sur le diagramme que* $(\vec{I}, \vec{U}) < (\vec{I'}, \vec{U})$; *le déphasage du courant par rapport à la tension a diminué, le facteur de puissance* $\cos\varphi$ *est amélioré. Il est égal à* 1 *lorsque* $\vec{I}$ *et* $\vec{U}$ *sont colinéaires, dans ce cas* $\sin\varphi = \frac{I''}{I'}$,

d'où $\qquad I'' = I'\sin\varphi = 12{,}5.\sqrt{1 - 0{,}8^2} = 12{,}5.0{,}6 = 7{,}5$ A.

On en déduit donc la capacité nécessaire, d'après (1),

$$C = \frac{I''}{U.\omega} = \frac{7{,}5}{120.100\pi} = 1{,}99.10^{-4}\text{F} = 199\mu\text{F}.$$

Contrôles — Pb 39 à Pb 43

Contrôle n° 1. Une tension alternative de fréquence 50 Hz et de valeur efficace U = 110 V est maintenue entre les deux bornes A et B d'une prise.

❶ On branche entre A et B une résistance pure R. Il passe l'intensité efficace 2A. Calculer R.

❷ On branche entre A et B une bobine d'inductance L, de résistance négligeable, il passe l'intensité efficace I = 1,1 A. En déduire l'impédance de la bobine et son inductance. La bobine est constituée par deux couches de spires jointives enroulées sur un noyau de perméabilité μ. Le rayon moyen du solénoïde est $r = 5$ cm, le diamètre du fil est $d = 2$ mm, il y a 600 spires. La résistivité du métal est $\rho = 1{,}6 . 10^{-8} \Omega . m$. Quelle est la perméabilité (relative) μ du noyau. Montrer qu'à 1 % près la résistance est effectivement négligeable devant $L\omega$.

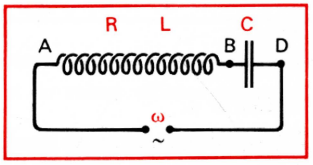
❸ On branche entre A et B un condensateur de capacité C. Il passe l'intensité efficace I = 1,1 A. En déduire l'impédance du condensateur et sa capacité. Si on veut réaliser un tel condensateur avec deux bandes de papier aluminium de largeur $l = 10$ cm, de longueur l', séparées par du papier paraffiné d'épaisseur $e = 0{,}02$ mm de constante diélectrique $\varepsilon = 3{,}6$, quelle longueur l' faudrait-il utiliser? Conclure. On donne $C = \dfrac{1}{36 . \pi . 10^9} \dfrac{\varepsilon S}{e}$, pour un condensateur plan.

❹ On branche entre A et B les trois appareils précédents en série. Montrer que le circuit ainsi réalisé est à la résonance. Quelle est alors son impédance? Quelle est l'intensité efficace qui le traverse, quelle est la tension efficace aux bornes de chaque appareil?

❺ On branche entre A et B les trois appareils précédents en dérivation. Quelle est l'intensité efficace dans le circuit principal?

Contrôle n° 2. On établit une tension alternative de pulsation ω entre les bornes A et D d'un circuit comprenant un condensateur C en série avec une bobine AB ayant une résistance R et une inductance L.
L'intensité efficace du courant étant 0,2 A la mesure des tensions efficaces fournit les résultats suivants :

$U_{AD} = 120$ V $U_{AB} = 160$ V $U_{BD} = 56$ V



❶ Calculer l'impédance du condensateur, la résistance R et la réactance d'induction $L\omega$.

❷ Représenter l'intensité et les tensions en utilisant la construction de Fresnel. Calculer le déphasage de l'intensité par rapport à la tension imposée entre A et D.

❸ Sachant qu'un courant de pulsation $\omega' = 250$ rd/s traversant le même circuit serait exactement en phase avec la tension qui existerait alors entre les extrémités A et D de ce circuit, déterminer les valeurs de l'inductance et de la capacité. Quelle était la valeur de la pulsation ω?

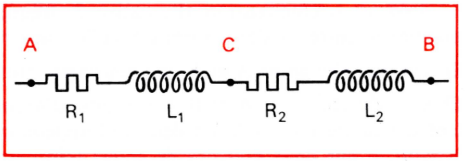
❹ La tension $u = 280\sqrt{2} \sin \omega t$ est maintenue aux bornes de la bobine et du condensateur, placés maintenant en dérivation. Représenter la tension u et les intensités traversant la bobine, le condensateur, le circuit principal. En déduire l'expression de l'intensité instantanée dans le circuit principal. *(D'après Bac.)*

Contrôle n° 3. N.B. — On prendra $\dfrac{1}{\pi} = 0{,}318$. La construction de Fresnel est vivement conseillée si l'on veut éviter des calculs inutiles.

❶ On considère une portion de circuit AB comprenant en série une résistance non inductive R_1, une bobine B_1 de résistance négligeable et d'inductance L_1.
a) On établit entre A et B une différence de potentiel continue de 100 V. L'intensité qui traverse le circuit est 1A. Calculer R_1.

b) On établit entre A et B une différence de potentiel $u = 100\sqrt{2} \sin 100\,\pi t$. L'intensité efficace du courant est alors 0,707 A. Calculer L_1.

❷ Dans une deuxième expérience, la portion de circuit AB comprend en série, la résistance R_1, la bobine B_1, une résistance non inductive $R_2 = 200\ \Omega$, une bobine B_2 d'inductance L_2 et de résistance négligeable.

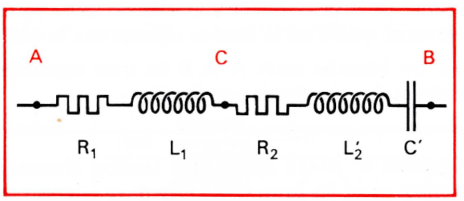


On désignera les impédances par Z_1 pour la portion AC, Z_2 pour la portion CB et Z pour le circuit AB. Dans cette question et les suivantes, on maintient entre A et B une différence de potentiel sinusoïdale $u = 100\sqrt{2} \sin 100\,\pi t$.

a) Quelle doit être la valeur de L_2 pour que l'égalité $Z = Z_1 + Z_2$ soit vérifiée?
b) Quelle est alors l'intensité efficace qui passe dans le circuit?

❸ On remplace la bobine B_2 par un condensateur de capacité C.
a) Quelle doit être la valeur de C pour que l'égalité $Z = R_1 + R_2$ soit vérifiée?
b) Quelle est alors l'intensité efficace qui passe dans le circuit?

❹ La portion de circuit de la deuxième question est modifiée de la façon suivante : R_1, B_1, et R_2 sont conservées;
B_2 est remplacée par une nouvelle bobine, B'_2, d'inductance $L'_2 = 0{,}954$ H et de résistance négligeable, on ajoute un condensateur de capacité C'.



On désigne les impédances par Z_1 pour le circuit AC, Z'_2 pour le circuit CB et Z' pour le circuit AB.

a) Quelle doit être la valeur de C' pour que l'on ait

$$Z' = Z_1 + Z_2\,?$$

b) Même question si l'on veut vérifier l'égalité

$$Z' = R_1 + R_2.$$

(Bac.)

Contrôle n° 4.

❶ Une tension alternative sinusoïdale, *u*, de fréquence N = 50 Hz, de valeur efficace U = 110 V est appliquée à une lampe au néon. La lampe, éteinte, s'illumine dès que la tension dépasse en valeur absolue $U_a = 89$ V. La lampe allumée, s'éteint dès que la tension est inférieure en valeur absolue à $U_e = 65$ V. Quelle est la fréquence des éclairs produits par cette lampe? Quelle est la durée de chaque éclair?

❷ On connecte en série avec la lampe une résistance pure $R = 297\ \Omega$, l'ensemble est soumis à la tension *u*. Montrer que la fréquence des éclairs n'est pas modifiée, mais que leur durée est plus brève. Evaluer cette dernière. Lorsque la lampe est allumée sa résistance est $r = 803\ \Omega$, elle se comporte comme une résistance pure.

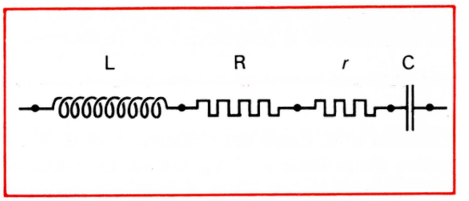
Contrôle n° 5. Un tube d'éclairage fluorescent peut être assimilé à un récepteur de courant alternatif qu'on assimilera à une résistance pure R et une inductance pure L associées en série. Ce tube est alimenté sous une tension alternative sinusoïdale de fréquence 50 Hz et de valeur efficace 220 V, dans ces conditions la puissance absorbée est 40 W et l'intensité efficace du courant est I = 0,45 A.

❶ Calculer l'impédance du circuit son facteur de puissance et les valeurs de R et de L.

❷ Ce tube fluorescent est utilisé dans un atelier pour l'éclairage d'une pièce tournante de forme cylindrique sur la surface latérale de laquelle huit rainures équidistantes ont été usinées. La vitesse de rotation de cette pièce tournante peut varier de 40 tr/mn à 2 500 tr/mn. Pour certaines valeurs de la vitesse de rotation, la pièce paraît immobile.

a) Expliquer pourquoi.
b) Sachant que le tube s'allume chaque fois que le module de la tension dépasse une certaine valeur critique de l'ordre de 200 V, quel est le nombre d'éclairs qui jaillissent par seconde?
c) Pour quelles valeurs de la vitesse de rotation exprimée en tours par minute, la pièce tournante paraît-elle immobile?

❸ Cette immobilité apparente peut être dangereuse pour le personnel. Pour éviter cet inconvénient, on éclaire la machine tournante au moyen de deux tubes fluorescents identiques au précédent, alimentés séparément par le secteur alternatif.
On adjoint en série au second une résistance r et une capacité C, le schéma équivalent à ce tube est alors le suivant :



On désignera par R′ la quantité $R' = R + r$.
On veut déterminer les valeurs de R′ et de C pour que les deux tubes soient parcourus par des courants alternatifs de même intensité efficace, I = 0,45 A, mais déphasés de $+\frac{\pi}{2}$; $(\vec{I}_1, \vec{I}_2) = \frac{\pi}{2}$.
a) Prendre pour origine des phases celle de la tension alternative du secteur. Représenter par deux vecteurs de Fresnel les intensités du courant dans chaque tube [noter que le déphasage de $\vec{I}$ par rapport à $\vec{U}$ est l'angle orienté $(\vec{I}, \vec{U})$].
b) En déduire les relations mathématiques permettant de calculer R′ et C; calculer R′, r et C.
c) Montrer que les dangers mis en évidence dans la précédente question disparaissent lorsqu'on utilise le duo qui vient d'être étudié (on pourra représenter en fonction du temps les variations des courants i_1 et i_2 pendant une période).
N.B. — En fait, ce sont les tensions V_1 et V_2 aux bornes des tubes qui commandent l'allumage, mais les tubes étant identiques, le déphasage $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ est égal au déphasage $(\vec{I}_1, \vec{I}_2)$ *(Bac.)*

Contrôle n° 6. Entre les deux bornes A et B d'une source de courant alternatif on dispose d'une tension de la forme $u = U\sqrt{2} \sin \omega t$, de fréquence f variable et de valeur efficace constante, U = 100 V.

❶ On réunit les bornes A et B par un circuit comprenant, en série, une résistance pure R = 25 Ω, un condensateur de capacité C = 10 μF et un ampèremètre thermique de résistance négligeable. On donne à la fréquence la valeur $f_1 = \frac{200}{\pi}$ Hz.
a) Calculer l'intensité efficace dans le circuit AB.
b) Calculer le déphasage de l'intensité instantanée par rapport à la tension instantanée et donner l'expression de l'intensité instantanée.

❷ On intercale entre la résistance et le condensateur une bobine de résistance négligeable et d'inductance, L inconnue.
a) On constate que, pour une fréquence f_2 = 100 Hz, l'ampèremètre indique I_2 = 2 A. Calculer les deux valeurs L′ et L″ qui peuvent être celles de L.
Interpréter l'existence de ces deux valeurs à l'aide de la construction de Fresnel.
b) Calculer, pour chaque valeur possible L′ et L″, quelle serait la fréquence de résonance du circuit.
Lorsque l'on augmente la fréquence f à partir de la valeur f_2, on constate expérimentalement que l'intensité commence par augmenter. En déduire quelle est, de L′ ou L″, la valeur correspondant à l'inductance L de la bobine.
c) Calculer l'expression littérale de la puissance électrique consommée dans le circuit en fonction de la fréquence f. Pour quelle valeur de f la puissance est-elle maximale? Ce résultat était-il prévisible? Expliquer pourquoi.
N.B. — Les questions ❶ et ❷ sont indépendantes. *(Bac.)*

Contrôle n° 7.

❶ On connecte en série, deux bobines B_1 et B_2, de résistance respectives R_1 et R_2, d'inductances respectives L_1 et L_2. Montrer que l'ensemble est équivalent à une bobine B, dont on déterminera la résistance R et l'inductance L.

❷ Chaque bobine, B_1 ou B_2, déphase le courant du même angle par rapport à la tension. B_1 et B_2 sont montées en dérivation. Montrer que l'ensemble est équivalent à une bobine unique, *b*, dont on déterminera la résistance *r* et l'inductance *l*.

Contrôle n° 8. Entre deux points, A et B, d'un circuit électrique, on maintient une tension alternative sinusoïdale $v = V_m \sin \omega t$, de valeur efficace V = 100 V, de fréquence 50 Hz.
On dispose en série entre A et B une résistance pure de valeur R_1, une bobine de résistance R_2 et d'inductance L, un ampèremètre thermique d'impédance négligeable, sur le cadran duquel on lit une intensité de 2 A. Un voltmètre thermique, branché entre les bornes de la résistance, indique $V_1 = 70$ V; un second voltmètre thermique, branché aux bornes de la bobine, indique $V_2 = 52$ V.

❶ Calculer les valeurs numériques des impédances Z_1 de la résistance, Z_2 de la bobine et Z de l'ensemble.

❷ Déterminer le déphasage, φ_1, entre la tension *v* maintenue entre A et B et l'intensité *i* du courant. Donner l'expression de *i* en fonction du temps.
Déterminer le déphasage, φ_2, entre la tension *v* maintenue entre A et B et la tension v_2 aux bornes de la bobine. Donner l'expression de v_2 en fonction du temps.

❸ Exprimer R_1 et R_2 en fonction des impédances Z_1, Z_2 et Z. Calculer numériquement R_1 et R_2 En déduire la valeur de L.

❹ On intercale maintenant, en série entre la résistance R_1 et la bobine, un condensateur de capacité C. Un des voltmètres reste toujours branché aux bornes de la résistance, mais le deuxième est maintenant branché aux bornes de l'ensemble bobine-condensateur.
Déterminer à l'aide de la construction de Fresnel et par le calcul la valeur à donner à la capacité C du condensateur pour que les indications de l'ampèremètre et des deux voltmètres restent identiques à ce qu'elles étaient dans l'expérience précédente. *(Bac.)*

Contrôle n° 9.

❶ On applique une tension continue de 100 V aux bornes d'une bobine d'inductance L = 0,636 H. L'intensité qui la traverse est 0,5 A. On remplace cette tension par une tension de la forme $u = U_m \sin \omega t$, de valeur efficace 100 V et de fréquence 50 Hz.
Exprimer l'intensité sous la forme $i = I_m \sin (\omega t + \varphi)$, φ étant nul dans l'expression correspondante de la tension. Quelle est la quantité de chaleur dégagée dans la bobine en 5 mn par le passage du courant?

❷ On place, en série avec la bobine, une batterie de condensateurs dont on peut faire varier la capacité C. Faire le schéma. Montrer, en utilisant la construction de Fresnel qu'il existe une valeur C_1, de C pour laquelle I_m a la même valeur que celle calculée ci-dessus. Calculer C_1.

❸ Dans ce dernier cas, exprimer la nouvelle intensité instantanée, i_1. Quel est le facteur de puissance du circuit? Quelle est la puissance moyenne dissipée?

❹ On fait croître la capacité de la batterie et l'on note les valeurs correspondantes de l'intensité, lues sur un ampèremètre thermique. Qu'observe-t-on quand C passe par la valeur $C_2 = 2\ C_1$? Quelle valeur lit-on sur l'ampèremètre? Exprimer l'intensité instantanée, i_2, correspondante. Quelle est alors l'énergie dissipée dans le circuit en 5 mn?

❺ Exprimer dans ce dernier cas les tensions aux bornes de la batterie de condensateurs et aux bornes de la bobine, sous la forme $u = U_m \sin (\omega t + \varphi)$. *(Bac.)*

Contrôle n° 10. On associe, pour former un circuit électrique, une résistance pure R et une bobine, de résistance négligeable et d'inductance L.

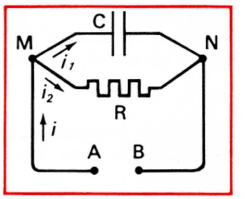
a) On branche successivement aux bornes de ce circuit :

— un générateur de courant continu, de résistance négligeable et de force électromotrice 12 V; l'intensité du courant dans le circuit est 0,5 A;

— un générateur G, fournissant une tension alternative sinusoïdale $u = U_m \sin \omega t$ de fréquence N = 50 Hz et de tension maximale U_m égale à 220 V. L'intensité efficace du courant dans le circuit est alors 2,3 A. Déduire de ces deux expériences les valeurs de R et de L.

b) On ajoute au circuit précédent un condensateur, placé en série avec la bobine et la résistance, de capacité C = 100 μF et l'on branche le générateur G aux bornes du circuit. Calculer l'impédance du circuit, l'intensité efficace du courant traversant le circuit, le déphasage entre la tension et le courant.

c) La fréquence N de la tension appliquée au circuit peut varier entre 20 Hz et 100 Hz. Montrer qu'il existe une valeur N_0 de la fréquence pour laquelle l'intensité efficace du courant I_0 est maximale. Calculer I_0 et N_0.



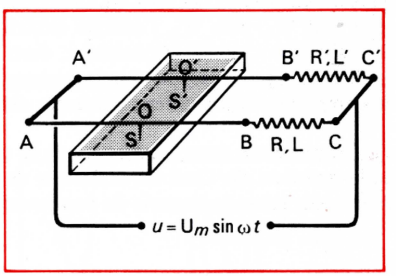
❶ Avec la résistance R et le condensateur C, on réalise le circuit ci-contre. On branche entre A et B le générateur G, fournissant une tension alternative de fréquence N = 50 Hz et de tension maximale U_m = 220 V.
On appelle i, i_1 et i_2 les valeurs instantanées de l'intensité du courant dans les branches AM, MCN et MRN du circuit.
Trouver les expressions de i_1 et de i_2 en fonction de U_m, R, C et N.

❷ Calculer l'intensité efficace du courant qui traverse les portions AM et NB du circuit. En déduire la valeur du déphasage entre la tension et le courant principal, la valeur de l'impédance de la portion du circuit comprise entre M et N ainsi que les valeurs efficaces des intensités i_1 et i_2. On rappelle que l'intensité instantanée du courant principal est égale à la somme des intensités instantanées des courants dérivés. On aura donc à faire la somme de deux intensités sinusoïdale. de même fréquence.

❸ Montrer que le système précédent est équivalent à une résistance ρ et un condensateur de capacité γ montés en série. Donner les expressions littérales de ρ et de γ en fonction de R, C et N.
N.B. — Les calculs numériques seront faits avec trois chiffres significatifs et l'on prendra $\pi^2 = 10$.

(Bac.)

Contrôle n° 11. Deux fils en cuivre identiques AB et A′B′ de résistance négligeable sont tendus parallèlement. Le fil AB est en série avec une résistance inductive BC de résistance R = 17,32 Ω et d'inductance $L = \frac{1}{10\pi}$ H. Le fil A′B′ est en série avec une résistance inductive B′C′ de résistance R′ = 10 Ω et d'inductance $L' = \frac{\sqrt{3}}{10\pi}$ H.



Les circuits ABC et A′B′C′ sont alimentés en parallèle sous une différence de potentiel sinusoïdale $u = U_m \sin \omega t$ de fréquence 50 Hz et de valeur efficace U = 20 V. Les fils AB et A′B′ sont alors respectivement parcourus par des courants d'intensités instantanées i et i'.

❶ Calculer les impédances de AC et de A′C′.

❷ Donner les expressions de i et de i', en fonction du temps et comparer i et i'.

❸ AB et A′B′, parcourus par i et i' sont dans un même plan horizontal. Ils sont soumis à un même champ magnétique uniforme, d'induction constante qui leur est perpendiculaire, dans une région entourant leurs milieux O et O′; ils vibrent chacun dans un plan vertical. Quelle est la direction du vecteur induction du champ? Quelle est la différence de phase entre les mouvements

de O et O′ ? Les deux fils tendus convenablement vibrent avec une amplitude maximale, en présentant un seul fuseau. Quelle est leur fréquence ? Calculer la tension de chaque fil.
Données : AB = 1 m, masse d'un fil : 10 g.

❹ On soude en O et O′ deux pointes verticales, de masse négligeable, OS et O'S', qui, les fils étant au repos, affleurent la surface d'un liquide. Lorsque les fils vibrent, dans les conditions de la question ❷, avec une amplitude de 5 mm, on obtient à la surface du liquide des franges d'interférences.

a) Ecrire la loi du mouvement communiqué par S à un point M de la surface du liquide tel que $MS = d_1$. Ecrire, de même, la loi du mouvement communiqué par S′ à M ($MS' = d_2$). On prendra $y = a \sin \frac{2\pi t}{T}$ comme équation du mouvement de S.

b) On considère un point M sur une frange d'amplitude maximale et l'on mesure

$$MS - MS' = d_1 - d_2 = 19{,}5 \text{ mm}.$$

On procède de même pour M′ situé sur une frange de même nature séparée de la première par deux autres franges d'amplitude maximale. On admettra que ces franges, correspondant aux points M et M′, sont situées d'un même côté de la médiatrice de SS′. On mesure :

$$M'S - M'S' = d'_1 - d'_2 = 73{,}5 \text{ mm}.$$

Calculer la longueur d'onde et la célérité du mouvement vibratoire qui se propage à la surface du liquide. *(Bac.)*

Contrôle n° 12. Une installation est alimentée par un secteur alternatif de pulsation ω, de tension efficace constante U. On donne : $U = 220$ V; $\omega = 100\ \pi$ rad/s.

❶ L'installation se compose d'un radiateur électrique, de résistance R, d'inductance négligeable, de puissance P_1. Déterminer R.
Application numérique : $P_1 = 1$ kW.

❷ On remplace le radiateur par un moteur électrique de puissance P_2, de facteur de puissance $\cos \varphi$. Déterminer l'intensité efficace I_2 du courant dans la ligne du secteur.
Application numérique : $P_2 = 866$ W; $\varphi = 30°$.

❸ On monte en parallèle avec le moteur une batterie de condensateurs, soit C la capacité de l'ensemble. Quelle doit être la valeur de C si l'on veut que le facteur de puissance de l'installation soit égal à 1 ?

❹ Un compteur mesure l'énergie électrique consommée par l'installation. Elle est la même dans les deux cas : ❷ puis ❸. Que peut-on dire des durées de passage du courant dans chaque cas ? Soit W_2, puis W_3, l'énergie électrique dépensée, par effet Joule, dans la ligne du secteur, de résistance *r*, avant le compteur, dans le cas ❷ puis ❸. Déterminer le rapport W_2/W_3. Quel est le montage qui est le plus intéressant, pour l'utilisateur, propriétaire de l'installation ? pour la compagnie distributrice d'énergie électrique ?

❺ On remplace dans le montage de la question ❸ la batterie de condensateurs par le radiateur de la question ❶. Quel est le facteur de puissance de l'installation ? Quelle aurait été sa valeur si on avait laissé la batterie de condensateurs aux bornes du moteur ?

Les courants de haute - fréquence

■ **Conseils généraux**

Lorsqu'une ligne est le siège d'ondes stationnaires de courant, il s'établit un ventre d'intensité dans l'enroulement où apparaît la f.e.m induite, des nœuds d'intensité aux extrémités de la ligne. Les nœuds d'intensité sont des ventres de tension et inversement.

---

n° 127. Un circuit est parcouru par un courant alternatif de fréquence N. On veut que le déphasage entre les intensités en deux points P et Q ne dépasse pas 1/100 rd. Quelle limite ℓ ne doit pas dépasser la distance PQ ?
Application numérique $N_1 = 50$ Hz $N_2 = 1$ MHz. Conclure.

ÉNONCÉ

CORRIGÉ

● *Raisonnons dans le cas limite ou* PQ $= \ell$ *c'est-à-dire que l'intensité en* P *est déphasée de* $\frac{1}{100}$ rd *avec l'intensité en* Q.

● *En* P, *en choisissant l'origine des temps convenablement* $i_P = I_m \sin 2\pi Nt$.

En Q $i_Q = I_m \sin 2\pi\left(Nt - \frac{\ell}{\lambda}\right)$ *en supposant* i_Q *en retard sur* i_P.

● *Le déphasage* $\frac{2\pi\ell}{\lambda} = \frac{1}{100} \Longrightarrow \ell = \frac{\lambda}{200\,\pi}$. *Supposons que les fils conducteurs soient sans isolant autre que l'air, dans ce cas la vitesse de propagation des ondes de courant est* $c = 3.10^8$ m/s. *Par suite* $\ell = \frac{c}{200\,\pi N}$.

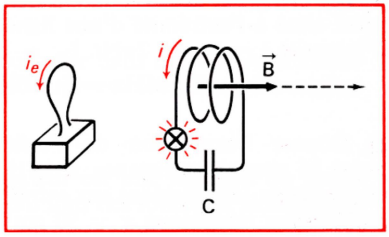
● *Application numérique : pour* $N_1 = 50$ Hz $\quad \ell_1 = 9{,}55.10^3\text{m} = 9{,}55$ km
pour $N_2 = 10^6$Hz $\quad \ell_2 = 0{,}48$ m

● *Conclusion : Pour* $N_1 = 50$ Hz *l'intensité est pratiquement la même en tous les points d'un circuit de laboratoire. Pour* $N_2 = 1$ MHz, *l'approximation précédente n'est plus acceptable.*

---

n° 128.

Un courant HF i_e produit dans une bobine comportant deux spires, de surface 10^3 cm², un champ magnétique pratiquement uniforme, dont l'induction est donnée par $B = B_0 \sin \omega t$ avec $B_0 = 10^{-5}$T et $\omega = 2\pi.10^5$ rd/s. $\vec{B}$ est normal au plan des spires. Quelle est la fréquence du courant i_e ? Déterminer la f.e.m induite maximale E_m dans la bobine.



ÉNONCÉ

● i_e *et* B *ont la même fréquence, par suite la fréquence du courant* i_e

$N = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi.10^5}{2\pi} = 10^5$Hz : *c'est bien un courant* HF.

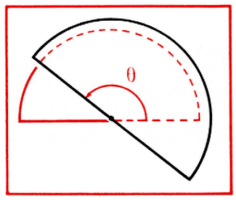
CORRIGÉ

● *Evaluons le flux* Φ *qui traverse les deux spires :* $\Phi = n\,BS$ *(puisque* $\vec{B}$ *est normal au plan des spires,* n *étant le nombre de spires,* S *la surface d'une spire). D'où* $\Phi = n\,B_0\,S \sin \omega t$.

● *La* f.e.m *induite* $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -n\,B_0 S\,\omega \cos \omega t$, *la f.e.m induite maximale est donc* $E_m = n\,B_0 S\,\omega = 1{,}25$ V. *Remarquons que* e *a même fréquence que* B *ou* i_e.

ÉNONCÉ

❷ L'inductance de la bobine est L = 0,1 mH, elle est en série avec un condensateur à air, dont les armatures en regard forment un secteur d'angle au centre θ. Lorsque les lames sont complètement engagées ($\theta = 180^0$), la capacité est 5.10^{-2} μF. Quelle valeur faut-il donner à θ pour accorder le circuit ? $\pi^2 = 10$.



● *Le circuit récepteur étant fermé, il apparaît un courant induit* i *de même fréquence que* e *c'est-à-dire de pulsation* $\omega = 2\pi.10^5$ rd/s

CORRIGÉ

● *Le circuit est accordé s'il est réglé à la résonance, par conséquent* $LC\omega^2 = 1$ *d'où*

$C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{0{,}1.10^{-3} \times (2\pi.10^5)^2} = 2{,}5.10^{-8}$ F.

● *La capacité du condensateur plan est proportionnelle à l'aire des armatures, donc*

$$\frac{\theta}{180} = \frac{2{,}5.10^{-8}}{5.10^{-8}} \Longrightarrow \theta = 90^0.$$

ÉNONCÉ

❸ Le circuit récepteur comprend en outre une ampoule de résistance R = 1Ω. Evaluer l'intensité efficace du courant ainsi que la puissance moyenne P, dépensée dans la lampe.

CORRIGÉ

● *A la résonance l'impédance totale du circuit est égale à sa résistance* Z = R, *l'intensité maximale* I_m *est donc* $I_m = \frac{E_m}{R} = 1{,}25$ A.

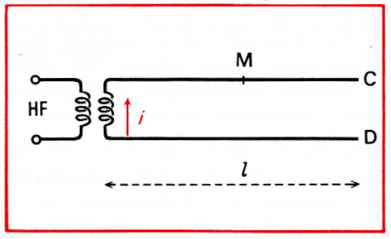
● *L'intensité efficace* $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}88$ A.

● *La puissance calorifique moyenne dépensée dans l'ampoule* $P = RI^2 = \frac{RI_m^2}{2} = 0{,}78$ W.

ÉNONCÉ

n° 129. Un générateur HF induit dans un enroulement situé à l'extrémité d'une ligne, un courant d'intensité $i = I_m \sin 2\pi Nt$. $I_m = 1$ mA

$N = 500$ MHz $= 5.10^8$Hz



❶ Donner l'expression de l'intensité en un point M situé à la distance *x* de l'enroulement. on négligera les réflexions aux extrémités C et D. Application numérique *x* = 90 cm.

CORRIGÉ

• *Si nous négligeons les réflexions aux extrémités* C *et* D, *c'est une onde progressive qui se propage à partir de l'enroulement.*

• *En* M *l'intensité est* $i_M = I_m \sin 2\pi \left(Nt - \frac{x}{\lambda}\right)$. *Si nous supposons que le fil conducteur est baigné uniquement dans l'air, la vitesse de propagation de l'onde de courant est* $c = 3.10^8$ m/s, *d'où* $\lambda = \frac{c}{N} = \frac{3.10^8}{5.10^8} = 0{,}6$ m. *Il s'ensuit que*

$i_M = 10^{-3} \sin \left(2\pi.510^8 t - 2\pi \frac{x}{0{,}6}\right)$, *pour* $x = 0{,}9$ m, $i_M = -10^{-3} \sin 10^9 \pi t$ *(en ampères).*

Remarque : l'intensité efficace en M est donc $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{10^{-3}}{\sqrt{2}} \simeq 7{,}10^{-4}$ A.

ÉNONCÉ

❷ Quelle doit être la longueur l de la ligne si l'on veut qu'elle soit accordée sur la fréquence du générateur ?

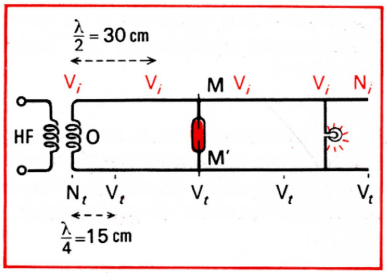
CORRIGÉ

La ligne est le siège d'ondes stationnaires présentant un ventre d'intensité dans l'enroulement, un nœud d'intensité aux extrémités. L'accord est réalisé lorsque $l = \frac{\lambda}{4} + k\frac{\lambda}{2}$ k *entier positif, avec* $\lambda = 0{,}6$ m.

ÉNONCÉ

❸ La ligne a pour longueur $l = 105$ cm. On déplace à partir de CD, une lampe à incandescence. Combien de fois brille-t-elle au maximum ? A quelles positions ?
On remplace la lampe à incandescence par une lampe au néon, répondre aux mêmes questions.

CORRIGÉ



• *La lampe à incandescence brille vivement aux ventres d'intensité* V_i *donc à* 30 cm, 60 cm, 90 cm *de l'enroulement ; c'est-à-dire trois fois.*

• *La lampe au néon brille vivement aux ventres de tension* V_t *(situés au nœud d'intensité) donc à* 15 cm, 45 cm, 75 cm *et juste en bout de ligne à* 105 cm *de l'enroulement ; c'est-à-dire quatre fois.*

Remarque : Si le centre O de l'enroulement induit est choisi pour définir l'origine des potentiels, les potentiels en M et M′, situés à égale distance de O, donc se faisant face, sont en opposition de phase : $v_{M'} = -v_M$. Le tube au néon subit donc la tension

$$v_M - v_{M'} = 2v_M$$

---

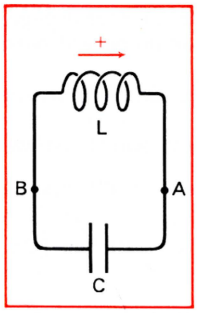
n° 130.

ÉNONCÉ

❶ Soit un condensateur de capacité C, chargé. Il se décharge dans une bobine d'inductance L, de résistance négligeable. Montrer que la décharge est oscillante. On néglige les déphasages dus aux effets de propagation.

CONSEIL

Montrer que la charge q d'une armature du condensateur est une fonction du temps telle que $q'' + \omega^2 q = 0$. Cette équation admet pour solutions des fonctions sinusoïdales du temps de la forme $q = a \sin(\omega t + \varphi)$.



● *Soit* q *la charge de l'armature* A *du condensateur, le condensateur est soumis à la chute de potentiel mesurée dans le sens positif choisi par* $v_A - v_B$. *A chaque instant* $v_A - v_B = \frac{q}{C}$ (1).

● *La bobine est soumise à la chute de potentiel* $v_B - v_A$. *Soit* e *la f.e.m d'auto-induction égale à* $-L\frac{di}{dt}$, *d'après la loi d'Ohm.*

$$v_B - v_A = Ri - e = Ri + L\frac{di}{dt}.$$

R *étant négligeable* $v_B - v_A = L\frac{di}{dt}$. (2)

CORRIGÉ

● *D'après* (1) *et* (2) $-\frac{q}{C} = L\frac{di}{dt}$. Comme $i = \frac{dq}{dt} = q'$; $\frac{di}{dt} = q''$, *il s'ensuit* $q'' + \frac{1}{LC}q = 0$.

Remarquons que $\frac{1}{LC} > 0$.

● *Cette équation est de la forme* $q'' + \omega^2 q = 0$, *avec* $\omega^2 = \frac{1}{LC}$

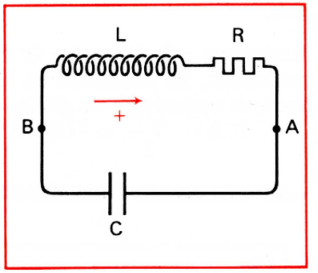
donc $q = a \sin(\omega t + \varphi)$ *avec* $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. q *est une fonction sinusoïdale du temps de période* $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Il s'ensuit que i, *égale à* $\frac{dq}{dt}$, *est aussi une fonction sinusoïdale du temps de période* T *(il suffit de dériver l'expression de* q *pour obtenir* i*).*

Remarque : Les électrons d'un circuit comprenant une capacité C et une inductance L, de résistance négligeable, ont donc des oscillations propres de pulsation ω telle que $LC\omega^2 = 1$.

ÉNONCÉ

❷ Le condensateur et la bobine précédents sont mis en série avec une résistance R faible, d'inductance négligeable. Ce circuit est utilisé comme récepteur. Un circuit émetteur induit une f.e.m *e* dans la bobine. Exprimer *e* en fonction de l'intensité *i* du courant. On néglige les effets de propagation.



CORRIGÉ

● $q = C(v_A - v_B)$, *d'autre part* $q = \int i\,dt$

d'où $v_A - v_B = \frac{1}{C}\int i\,dt$ (1)

● *Appliquons la loi d'Ohm au reste du circuit : la chute du potentiel* $v_B - v_A = Ri - e'$. e′ *se compose de la f.e.m. induite* e *et de la f.e.m. d'auto-induction* $-L\frac{di}{dt}$,

d'où $v_B - v_A = Ri - e + L\frac{di}{dt}$. (2)

● *D'après* (1) *et* (2) $Ri - e + L\frac{di}{dt} = -\frac{1}{C}\int i\,dt$ *d'où* $e = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt$ (3)

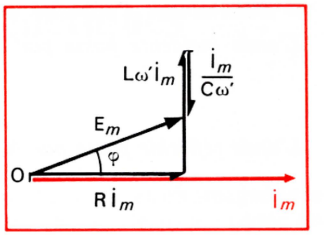
ÉNONCÉ

❸ La f.e.m induite *e* est sinusoïdale $e = E_m \sin \omega' t$. Les électrons n'oscillent plus à leur pulsation propre mais à celle, ω′ de *e* : ils subissent des oscillations forcées. Alors $i = I_m \sin(\omega' t - \varphi)$. Montrer que $E_m = ZI_m$ où Z est l'impédance totale du circuit.

CORRIGÉ

• *Il suffit de construire les vecteurs de Fresnel des grandeurs sinusoïdales de la relation* (3), *puis d'appliquer le théorème de Pythagore*

$$E_m = ZI_m \quad \textit{avec} \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega' - \frac{1}{C\omega'}\right)^2}.$$



Notons que c'est une extension aux courants alternatifs de la loi de Pouillet vue en courant continu.

• **Remarque :** Lorsque ω' est telle que $LC\omega'^2 = 1$ nous sommes à la résonance. D'après la question 1, $\omega' = \omega$, cela signifie que la f.e.m *e* fait vibrer à la résonance les électrons du circuit à leur période propre. (Ce résultat n'est valable que si R est faible.)

ÉNONCÉ

n° 130 bis. Un conducteur rectiligne AB comporte en son milieu O un enroulement dans lequel on induit une f.e.m. sinusoïdale de fréquence N = 75 MHz.

❶ Montrer que pour une valeur convenable de la longueur l = AB, il s'établit des ondes stationnaires de courant avec un seul ventre d'intensité. Déterminer l.

CORRIGÉ

• *Le conducteur est alors le siège d'ondes stationnaires présentant un ventre d'intensité dans l'enroulement et un nœud aux extrémités* A *et* B. *D'où :* $l = \frac{\lambda}{2}$.

• *Evaluons la longueur d'onde :*

$$\lambda = cT = \frac{c}{N}; \quad \lambda = \frac{3.10^8}{75.10^6} = 4 \text{ m} \implies l = 2 \text{ m}$$

Remarque : il s'agit d'une antenne demi-onde.

ÉNONCÉ

❷ l a la valeur déterminée dans la question ❶. L'intensité efficace en O est I_0. En ne considérant qu'une réflexion des ondes de courant sur l'extrémité A, déterminer l'intensité efficace, I_M, en M situé à la distance x de A.
Application numérique : $I_0 = 1$ mA; $x = 50$ cm.

CONSEIL

Transposer le raisonnement fait à propos des ondes stationnaires mécaniques. (Voir Physique, page 155.) Considérer les intensités en M et en O.

CORRIGÉ

• *L'onde de courant partant de* O, *se réfléchit en* A. *Ondes incidente et réfléchie interfèrent.*

• A *est un nœud d'intensité : l'intensité* $i_A = 0$. *S'il n'y avait que l'onde incidente, l'intensité serait :*

$$i'_A = I_m \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

S'il n'y avait que l'onde réfléchie :

$$i''_A = -I_m \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

En effet :

$$i_A = i'_A + i''_A = 0 \implies i''_A = -i'_A$$

CORRIGÉ

● *Déterminons l'intensité en* M.

L'onde incidente passe par M *puis par* A, *donc :*

$$i'_M = I_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right).$$

L'onde réfléchie passe par A *puis par* M, *donc :*

$$i''_M = -I_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

D'où l'intensité résultante en M :

$$i_M = i'_M + i''_M.$$

D'après : $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$.

$$i_M = 2I_m \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

D'où l'intensité efficace en M :

$$I_M = \frac{1}{\sqrt{2}} 2I_m \left| \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \right| \qquad (1)$$

Numériquement : $x = 0{,}50$ m; $\lambda = 4$ m

d'où $I_M = I_m$ (2)

● *De même en* O : $x = 1$ m, *d'après la relation* (1) :

$$I_0 = \sqrt{2}\, I_m \quad (3)$$

● *Afin de comparer* I_M, *inconnue, à* I_0 *connue, divisons* (2) *par* (3) *membre à membre :*

$$\frac{I_M}{I_O} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \text{ puisque } I_0 = 1 \text{ mA} : I_M = 0{,}707 \text{ mA}.$$

Les ondes électromagnétiques

■ **Conseils généraux**

Dans les ondes stationnaires qui prennent naissance lorsqu'une onde électromagnétique se réfléchit sur un écran métallique, il s'établit un nœud de champ électrique (donc un ventre d'induction magnétique) sur l'écran.

---

n° 131.

ÉNONCÉ

❶ Un émetteur comprend une antenne A_1, demi-onde, verticale, de longueur l. Quelle est la fréquence du champ électromagnétique qui se propage à partir de l'antenne? L'antenne est sans isolant autre que l'air. Application numérique $l = 1$ m.

CORRIGÉ

● *Les ondes de courant dans l'antenne et les ondes électromagnétiques dans l'air, ont la même fréquence* f *et la même célérité* c, *donc la même longueur d'onde* λ.

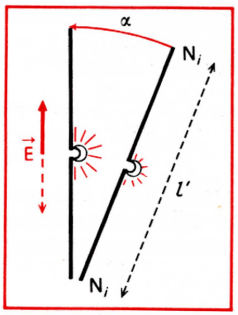
● *L'antenne étant demi-onde (un nœud d'intensité à chaque extrémité, un ventre d'intensité au milieu) sa longueur* $l = \frac{\lambda}{2} \Longrightarrow \lambda = 2\,l$, *comme* $\lambda = \frac{c}{f}$, *nous en déduisons. la fréquence* $f = \frac{c}{2l}$. *Numériquement* $f = \frac{3.10^8}{2} = 1{,}5.10^8$ Hz.

ÉNONCÉ

❷ Un résonateur ouvert comprend en son centre une petite ampoule à incandescence. Quelle doit être sa longueur l' si l'on veut qu'il soit accordé sur la fréquence f ? Déterminer sa longueur minimale. Comment doit-on l'orienter pour détecter au mieux le champ électrique $\vec{E}$ produit par l'antenne?

CORRIGÉ

● *Le résonateur, réglé à la résonance, est le siège d'ondes stationnaires de courant avec un nœud d'intensité* (N_i) *à chaque extrémité. Sa longueur* l' *est donc égale à* $l' = k\frac{\lambda}{2}$ (k *entier positif*).



● *La longueur minimale correspond au régime fondamental* $k = 1 \quad l' = \frac{\lambda}{2}$.

Comme $\lambda = 2$ m $\quad l' = 1$ m. *Le résonateur a alors la même longueur que l'antenne demi-onde émettrice.*

● *Lorsque l'antenne fait l'angle* α *avec le champ électrique oscillant* $\vec{E}$, *les électrons libres de l'antenne sont soumis à la composante* $E_t = E \cos \alpha$. *L'ampoule brillera au maximum si* $\alpha = 0$ *c'est-à-dire lorsque le résonateur est parallèle à l'antenne émettrice, c'est-à-dire vertical.*

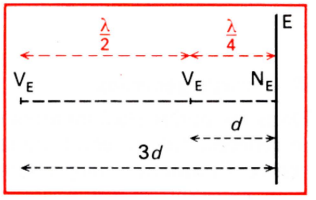
ÉNONCÉ

❸ On déplace le résonateur entre l'antenne et un écran métallique vertical. On constate que la lampe brille plus vivement lorsque le résonateur est à la distance d de l'écran, ainsi qu'aux distances $3d$, $5d$... Déterminer d. Le résonateur reste constamment vertical.

● *Les ondes électromagnétiques réfléchies par l'écran interfèrent avec les ondes incidentes, il se produit des ondes stationnaires. Il y a un nœud de champ électrique sur l'écran, le résonateur détecte les ventres de champ électrique.*

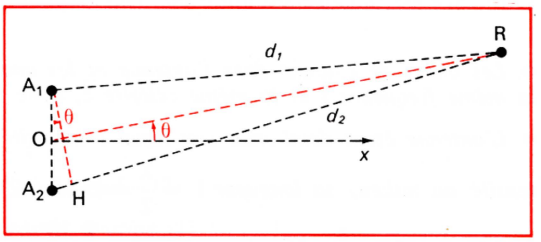
CORRIGÉ

● *Entre l'écran et le premier ventre de champ électrique la distance est* $\frac{\lambda}{4}$, *le ventre de champ électrique suivant est à* $\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = 3\frac{\lambda}{4}$, ... *Par suite, conformément à l'énoncé* $d = \frac{\lambda}{4} = \frac{2}{4} = 0{,}5$ m.



ÉNONCÉ

❹ Une seconde antenne A_2, identique à A_1, parallèle, à la distance a de A_1, est parcourue par le même courant HF. On déplace le résonateur à une grande distance de A_1 et A_2. Dans quelles directions horizontales la lampe du résonateur brillera-t-elle au maximum ? Le résonateur reste constamment vertical. Application numérique $a = 6$ m.



● *Les oscillations électriques en* A_1 *et* A_2 *sont en phase. Les ondes émises interfèrent (ceci est tout à fait comparable aux interférences lumineuses). Prenons pour plan de figure le plan médiateur, horizontal, des antennes.*

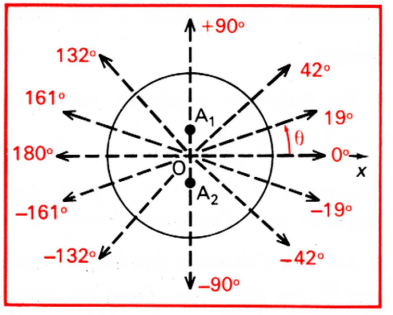
● *Le résonateur* R, *à grande distance, est repéré, par l'angle* $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OR}) = \theta$. *Il est situé à la distance* d_1 *de* A_1, *et* d_2 *de* A_2. *(Remarquons que les champs électriques parallèles aux antennes s'ajoutent algébriquement.) La lampe brille au maximum lorsque l' amplitude du champ électrique est maximum, c'est-à-dire lorsque* $d_2 - d_1 = k\lambda \quad k \in Z$.

● *Evaluons la différence de marche* $d_2 - d_1$ *en fonction de* θ. *Traçons l'arc de cercle* A_1H *de centre* R. *Cet arc de cercle est normal à* OR *et à* A_2R *qui sont des rayons. D'autre part* $d_2 - d_1 = A_2H$. *Comme* d_2 *et* d_1 *sont grands devant* a, *l'arc de cercle* A_1H *se confond pratiquement avec le segment de droite* A_1H. *Il s'ensuit que* $(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1H}) = \theta$, *et que le triangle* A_1A_2H *est rectangle en* H.

CORRIGÉ

Dans ce triangle

$$\sin\theta = \frac{A_2H}{A_1A_2} \Longrightarrow A_2H = a\sin\theta$$
$$\Longrightarrow d_2 - d_1 = a\sin\theta.$$



● *Finalement la lampe brillera au maximum dans les directions telles que*

$$a\sin\theta = k\lambda \qquad \sin\theta = k\frac{\lambda}{a}$$

● *Application numérique :* $\lambda = 2$ m $\qquad a = 6$ m

$$\sin\theta = \frac{k}{3} \text{ comme}$$

$$-1 \leqslant \sin\theta \leqslant 1 \qquad -3 \leqslant k \leqslant +3 \text{ donc } \sin\theta \in \left\{-1; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right\}.$$

Remarque : A grande distance, les hyperboles d'amplitude de champ électrique maximale sont très proches de leurs asymptotes. Ce sont les directions asymptotiques que nous avons déterminées.

Électronique

Pb 46 à Pb 48

■ **Conseils généraux**

— Le principe fondamental de la dynamique $(\vec{F} = m\vec{\gamma})$ et le théorème de l'énergie cinétique $\Delta E_c = \Sigma\overline{W}$ ne sont valables que tant que la vitesse de l'électron reste très inférieure à la célérité de la lumière c.

— L'effet du poids de l'électron est presque toujours négligeable (ce qui ne veut pas dire que la masse de l'électron est négligeable).

---

n° 132. Une diode à vide soumise à une tension $U_p = 100$ V débite un courant d'intensité $I_p = 50$ mA. $e = 1{,}6.10^{-19}$ C.

ÉNONCÉ

❶ Evaluer le nombre d'électrons qui arrivent sur la plaque pendant une seconde.

CORRIGÉ

● *Le courant transporte la quantité d'électricité* $q = I_p.t$, *c'est-à-dire* n *électrons de charge* e *(en valeur absolue). Par suite* $q = I_p.t = ne \Longrightarrow n = \dfrac{I_p.t}{e}$.

● *Numériquement* $n = \dfrac{50.10^{-3} \times 1}{1{,}6.10^{-19}} = 3{,}12.10^{17}$ *électrons.*

ÉNONCÉ

❷ Quelle est la vitesse des électrons lorsqu'ils arrivent au niveau de la plaque? Leur vitesse initiale est négligeable. La masse de l'électron est $m = 9.10^{-31}$ kg.

CORRIGÉ

● *Le travail de la force électrique s'exerçant sur l'électron, est moteur et égal à* eU_p *(que le champ électrique soit uniforme ou pas).*

● *Appliquons le théorème de l'énergie cinétique (on suppose que la vitesse est faible devant* c*)* $\Delta E_c = \dfrac{1}{2}mv^2 - 0 = \Sigma\overline{W} = eU_p$ *(on néglige le travail du poids de l'électron)*

d'où $v = \sqrt{\dfrac{2eU_p}{m}} = \sqrt{\dfrac{2.1{,}6.10^{-19} \times 10^2}{9.10^{-31}}} = 5{,}96.10^6$ m/s.

ÉNONCÉ

❸ Les électrons sont arrêtés par la plaque, leur énergie cinétique s'y transforme en chaleur. Quelle est la quantité de chaleur dissipée par la plaque pendant une seconde?

CORRIGÉ

Il y a deux solutions :

● *A l'échelle électronique :* n *électrons arrivent par seconde sur la plaque, apportant l'énergie* $W = nE_c = neU_p$.

● *A notre échelle, la diode, est un récepteur : l'énergie* W *consommée dans ce récepteur est liée à l'intensité* I_p *qui le traverse par* $W = U_pI_pt$ *(formule des courants continus).*

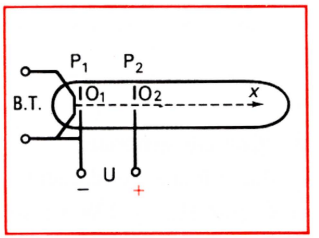
● *Les deux solutions conduisent au même résultat puisque* $I_pt = ne$ *(1er question). Numériquement* $W = U_pI_pt = 100.50.10^{-3}.1 = 5$ J, *comme* 1 *calorie* $= 4{,}19$ J, $W = 1{,}19$ cal.

n° 133

ÉNONCÉ

❶ Entre deux plaques parallèles P_1 et P_2, distantes de ℓ, percées en O_1 et O_2, on maintient une différence de potentiel U. Le champ électrique est pratiquement nul à l'extérieur des plaques. L'ensemble est dans une ampoule où règne le vide. Quelles sont les caractéristiques du champ électrique $\vec{E}$ entre les plaques.

$\ell = 10$ cm U = 900 V



CORRIGÉ

● *Le champ électrique entre les deux plaques parallèles (sauf au voisinage des extrémités) est uniforme. Le vecteur champ électrique* $\vec{E}$ *en un point est*
— *perpendiculaire aux armatures,*
— *dirigé vers l'armature négative,*
— *de module* $E = \frac{U}{\ell} = \frac{900}{0{,}1} = 9.10^3$ V/m.

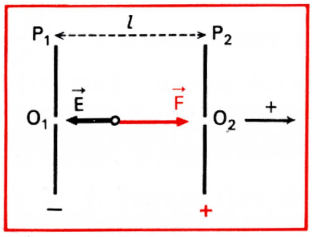
ÉNONCÉ

❷ Ecrire l'équation horaire du mouvement d'un électron parti de O_1 sans vitesse.

$e = 1{,}6.10^{-19}$ C $m = 9.10^{-31}$ kg

CORRIGÉ

● *Le champ électrique* $\vec{E}$ *communique à l'électron de charge (algébrique)* — e, *la force* $\vec{f} = -e\vec{E}$. $\vec{E}$ *étant constant,* $\vec{f}$ *est constante de module* $f = \frac{eU}{\ell}$.



● *D'après le principe fondamental de la dynamique, en négligeant le poids de l'électron et en supposant que la vitesse reste faible devant* c, *l'électron prend une accélération* $\vec{\gamma}$ *telle que* $\vec{F} = m\vec{\gamma}$, $\vec{F}$ *étant constante,* $\vec{\gamma}$ *est constante, de module* $\gamma = \frac{F}{m} = \frac{eU}{m\ell}$. *Numériquement* $\gamma = \frac{1{,}6.10^{-19}.900}{9.10^{-31}.0{,}1} = 1{,}6.10^{15}$ m/s² *(*γ *est très supérieur à* g, *ce qui montre bien que l'effet du poids est négligeable).*

● *Le mouvement est donc uniformément accéléré de* O_1 *à* O_2, *il a pour équation horaire* $x = \frac{1}{2}\gamma t^2 = 8.10^{14}t^2$ *(en prenant l'origine des dates* $t = 0$ *à l'instant du départ de l'électron de* O_1*).*

ÉNONCÉ

❸ Ecrire l'équation horaire du mouvement d'un électron après son passage par le trou O_2.

CORRIGÉ

Le champ électrique est nul, le mouvement est pratiquement rectiligne uniforme. Sa vitesse v *est la vitesse finale du mouvement précédent. Calculons la :*

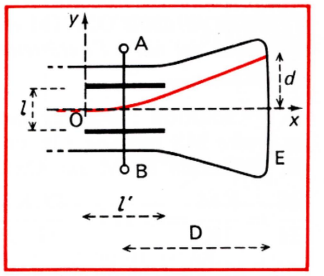
$$\Delta(v^2) = 2\bar{\gamma}.\Delta x \Longrightarrow v = \sqrt{2\gamma\ell} = \sqrt{2 \times 1{,}6.10^{15} \times 0{,}1} = 1{,}79.10^7 \text{ m/s.}$$

Le passage par O_2 *définissant les origines de temps et d'espace, l'équation horaire de ce mouvement rectiligne uniforme est* $x = vt = 1{,}79.10^7$ t.

n° 134

ÉNONCÉ

❶ Entre deux plaques horizontales distantes de l, on maintient une tension $U = V_A - V_B$. On fait arriver en O un faisceau électronique, horizontal, homocinétique. La vitesse des électrons est $\vec{v_0}$.
Déterminer la trajectoire des électrons entre les plaques.
$\vec{v_0}$ est parallèle aux plaques.



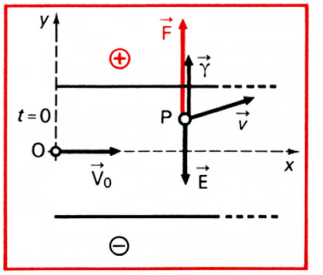
Un faisceau électronique est dit homocinétique si tous les électrons ont même vecteur vitesse.

CONSEIL

- *Le champ électrique entre les plaques est uniforme, de module* $E = \dfrac{U}{l}$.

- *Un électron subit une force électrique* $\vec{F}$:

$$\vec{F} = -e\vec{E} \Longrightarrow F = eE = e\,\frac{U}{l}.$$



Cette force $\vec{F}$ *est constante :*

- *D'après la relation fondamentale de la dynamique (en négligeant le poids de l'électron)*

$\vec{F} = m\vec{\gamma}$: $\vec{\gamma}$ *est donc constant de module* $\gamma = \dfrac{eU}{ml}$.

- *Dans le système d'axes* OxOy :

$$\vec{\gamma} \text{ a pour composantes } \begin{vmatrix} \gamma_x = 0, \\ \gamma_y = \gamma = \dfrac{eU}{ml}, \end{vmatrix} \qquad \vec{v_0} \begin{vmatrix} v_{0,x} = v_0, \\ v_{0,y} = 0. \end{vmatrix}$$

CORRIGÉ

- *Equation de la trajectoire*

— 1re solution : *le mouvement suivant* Ox *est un mouvement uniforme. Par suite* $x = v_{0,x}t + x_0 = v_0 t$ *(en prenant l'origine des temps lors du passage en* O*) le mouvement suivant* Oy *est uniformément accéléré. Par suite*

$$y = \frac{1}{2}\gamma_y t^2 + v_{0,y}t + \gamma_0 = \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

Eliminons t *entre* x *et* y, *on obtient l'équation cartésienne de la trajectoire*

$y = \dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma}{v_0^2}x^2 = \dfrac{eU}{2mlv_0^2}x^2$: *entre les plaques le faisceau est parabolique.*

— 2e solution : *Remontons de* $\vec{\gamma}$ *à* $\overrightarrow{OP}$ *par intégrations par rapport au temps, en prenant pour* $t = 0$ *le même choix que ci-dessus*

$$\vec{\gamma} \begin{vmatrix} \gamma_x = 0 \\ \gamma_y = \gamma \end{vmatrix} \text{ intégrons : } \vec{v} \begin{vmatrix} v_x = v_0 \text{ (constante)} \\ v_y = \gamma t \text{ (+ constante} = 0) \end{vmatrix}$$

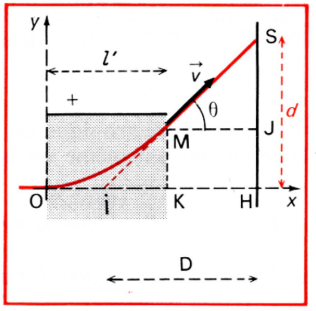
$$\text{intégrons : } \overrightarrow{OP} \begin{vmatrix} x = v_0 t \text{ (+ constante} = 0) \\ y = \dfrac{1}{2}\gamma t^2 \text{ (+ constante} = 0) \end{vmatrix}$$

ÉNONCÉ

❷ La tension $V_A - V_B$ passe de O à U. Quelle est la déviation d du spot sur l'écran E ? On appelle l' la longueur des plaques, D la distance de l'écran au centre des plaques.
Application numérique :

$U = 100$ V $\quad l = 5$ cm $\quad l' = 10$ cm $\quad D = 20$ cm
$v_0 = 10\,000$ km/s $\quad e = 1{,}6.10^{-19}$ C $\quad m = 9.10^{-31}$ kg

● *Lorsqu'un électron sort du champ, en* M, *il prend un mouvement rectiligne* MS *tangent à l'arc de parabole* OM. (M *étant le point d'abscisse* $x = l'$). *(Nous supposons que le champ électrique est nul à l'extérieur du condensateur, que l'effet du poids de l'électron est négligeable).*



— 1re solution : *D'après une propriété de la parabole : la droite* MS *recoupe* Ox en I, *qui est le milieu de* OK (K *projection de* M *sur* Ox). *Par suite (voir figure) :*

$$\frac{HS}{IH} = \frac{KM}{IK} \Longrightarrow HS = \frac{D.KM}{l'/2} \cdot$$ KM *est l'ordonnée du point* M, *en remplaçant* x *par* l' *dans l'équation de la parabole* $KM = \frac{\gamma l'^2}{2v_0^2}$.

D'où $d = HS = \frac{D.\gamma.l'^2}{v_0^2 l'} = \frac{e}{m} \cdot \frac{1}{v_0^2} \cdot \frac{l'D}{l} \cdot U$: *la déviation est proportionnelle à la tension* $V_A - V_B = U$ *appliquée aux plaques.*

CORRIGÉ

— 2e solution *(si on ignore la propriété de la parabole utilisée ci-dessus) : La pente de la tangente* MS *est égale à la valeur de la dérivée de* y *par rapport à* x *pour* $x = l'$, *d'où*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma x}{v_0^2}, \text{ pour } x = l' \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\gamma l'}{v_0^2} \cdot$$

La pente étant égale à la tangente de $(\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MS}) = \theta$, *on en déduit* $\text{tg}\,\theta = \frac{\gamma l'}{v_0^2}$ *(*θ *nous donne ainsi la déviation angulaire).*

Dans le triangle MJS $\text{tg}\,\theta = \frac{JS}{MJ} = \frac{d - KM}{D - l'/2}$, *en remplaçant* KM *par sa valeur on retrouve l'expression de* d *trouvée dans la* 1re *méthode*

● *Numériquement* $d = \frac{1{,}6.10^{-19}}{9.10^{-31}} \cdot \frac{1}{10^{-14}} \cdot \frac{10^{-1}.2.10^{-1}.10^2}{5.10^{-2}} = 7{,}1.10^{-2}\ \text{m} = 7{,}1\ \text{cm}$

ÉNONCÉ

❸ Quelle est l'énergie cinétique d'un électron lorsqu'il arrive sur l'écran ?

● *Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre* O *et* S *(négligeons le travail du poids)* $E_C - E_{C0} = \Sigma\overline{W}$ $\quad E_{C0} = \frac{1}{2} m v_0^2$ $\quad \Sigma\overline{W} = F.KM$ *(la force électrique se déplaçant dans sa propre direction de* KM*). D'où :*

CORRIGÉ

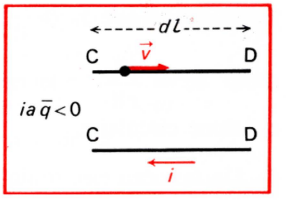
$$E_C = \frac{1}{2} m v_0^2 + eE.KM. = \frac{1}{2} m v_0^2 + eU.\frac{KM}{l} \cdot$$

● *Numériquement* $\frac{KM}{IK} = \frac{HS}{IH}$ *comme* $HS = 7{,}1.10^{-2}$m.

$$KM = \frac{7{,}1.10^{-2} \times 5.10^{-2}}{20.10^{-2}} = 1{,}78.10^{-2}\ \text{m}.$$

D'où $E_c = 5{,}07.10^{-17}$ J.

n° 135. Soit une charge électrique $\bar{q}$ animée de la vitesse $\vec{v}$ (supposée constante sur le trajet CD de longueur très faible dl).



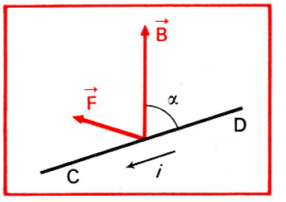
La charge $\bar{q}$ met le temps $dt = \dfrac{dl}{v}$ pour passer de C à D.

— Tout se passe comme si un courant i (de même sens que $\vec{v}$ si $\bar{q} > 0$, de sens contraire si $\bar{q} < 0$) circulait sur le parcours dl. Pendant le même temps dt, i doit transporter la quantité d'électricité q; par suite i est telle que $q = idt = i\dfrac{dl}{v}$ d'où $qv = idl$.

— Supposons l'élément de courant dl baigné par un champ d'induction magnétique uniforme $\vec{B}$ faisant l'angle α avec dl. D'après la loi de Laplace l'élément de courant est soumis à une force $\vec{F}$ perpendiculaire à $\vec{B}$ et à dl, d'intensité $F = I.dl.B \sin \alpha$.

REMARQUE

● D'après l'assimilation précédente nous en déduisons qu'une charge q animée de la vitesse $\vec{v}$ dans le champ d'induction magnétique $\vec{B}$ est soumise à une force magnétique $\vec{F}$ perpendiculaire à $\vec{B}$ et à $\vec{v}$, d'intensité $F = qvB \sin \alpha$ (α angle entre $\vec{B}$ et $\vec{v}$) son sens est donné par la règle d'Ampère ou la règle des trois doigts (considérer alors le courant équivalent).



ÉNONCÉ

❶ Un faisceau électronique horizontal arrive dans un champ magnétique uniforme dont l'induction $\vec{B}$ est verticale. Montrer que la trajectoire d'un électron est circulaire. Evaluer son rayon R.

CONSEIL

Dans un mouvement curviligne, en coordonnées curvilignes, le vecteur accélération a deux composantes : une composante tangentielle $\gamma_t = \dfrac{dv}{dt}$, une composante normale $\gamma_n = \dfrac{v^2}{R}$ (R rayon de courbure) — revoir P.6.

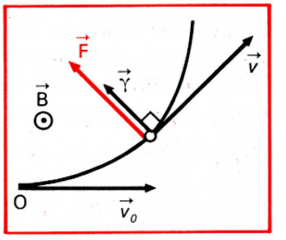
CORRIGÉ

● *L'électron entre en* O *dans le champ magnétique à la vitesse horizontale* $\vec{v}_0$. *La force magnétique, perpendiculaire à* $\vec{B}$, *est constamment horizontale. Nous en déduisons que l'électron, si nous négligeons son poids, reste dans un plan horizontal.*

● *Par suite* $\vec{B}$ *est constamment perpendiculaire au vecteur vitesse* $\vec{v}$: $\alpha = 90°$; $\sin \alpha = 1$.

● *Ecrivons la relation fondamentale de la dynamique :*

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} \quad \text{avec} \quad F = eBv \quad \text{d'où} \quad \gamma = \frac{eBv}{m}$$



— *Comme* $\vec{F} \perp \vec{v}$ *nous en déduisons que* $\vec{\gamma}$ *est normal à la trajectoire : sa composante tangentielle* $\gamma_t = 0$, *sa composante normale* $\gamma_n = \gamma$.

— $\gamma_t = \dfrac{dv}{dt} = 0$, *d'où en intégrant :* v *est constante et égale à* v_0, *le mouvement est donc uniforme.*

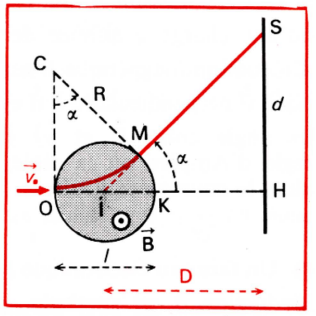
CORRIGÉ

Etant donné que $\gamma_n = \frac{v^2}{R}$, que $\gamma_n = \gamma = \frac{Bev}{m}$ et que $v = v_0$ il s'ensuit que $\frac{v_0^2}{R} = \frac{Bev_0}{m}$ d'où $R = \frac{mv_0}{eB}$; le rayon de courbure de la trajectoire est constant : la trajectoire est donc circulaire.

ÉNONCÉ

❷ Un faisceau électronique horizontal homocinétique, de vitesse $\vec{v_0}$ traverse un champ magnétique d'induction $\vec{B}$ verticale. Le champ magnétique est uniforme à l'intérieur d'un cercle horizontal de centre I de diamètre ℓ. La vitesse $\vec{v_0}$ est dirigée vers I. Un écran est placé à la distance D de I, perpendiculairement à $\vec{v_0}$. Lorsque l'induction B est nulle, le spot est en H sur l'écran. Quelle déviation d subit-il lorsque l'induction prend la valeur B ?
Application numérique $v_0 = 16\,000$ km/s ; $B = 10^{-3}$T ; $\ell = 1{,}8$ cm ; $D = 10$ cm
$e = 1{,}6.10^{-19}$ C ; $m = 9.10^{-31}$ kg.

CORRIGÉ



- *Supposons* $\vec{B}$ *dirigé vers le haut, dans le champ magnétique le faisceau est un arc de cercle* OM, *de rayon* $R = \frac{mv_0}{eB}$ *de centre* C. *Lorsque l'électron sort du champ il prend un mouvement rectiligne* MS, *tangent à l'arc* OM.
- *Démontrons que* MS *passe par* I : *le cercle de centre* I *et l'arc de cercle* OM *de centre* C *admettent* CI *comme axe de symétrie, par suite comme les deux cercles se coupent à angle droit en* O ($\vec{v_0}$ *est tangent à l'arc* OM *et passe par* I), *ils se coupent à angle droit en* M. *La tangente* MS *à l'arc* OM *passe donc par* I.
- *Soit* α *la déviation angulaire :* $\alpha = (\vec{IH}, \vec{IS})$. *L'angle* $(\vec{CO}, \vec{CM}) = \alpha$ *(comme angles à côtés perpendiculaires),* CI *étant la bissectrice de* $(\vec{CO}, \vec{CM})$, $(\vec{CO}, \vec{CI}) = \frac{\alpha}{2}$. *Dans le triangle rectangle* COI $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{OI}{CO} = \frac{\ell}{2R}$.

Supposons pour continuer que α *soit petit* $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \simeq \frac{\alpha}{2}$ (rd) *d'où* $\alpha \simeq \frac{\ell}{R}$ *(on aurait pu trouver ce résultat, plus rapidement en disant que pratiquement la longueur de l'arc de cercle* OM *était pratiquement égale à* ℓ*).*

- *Dans le triangle rectangle* IHS : $\operatorname{tg}\alpha = \frac{SH}{IH} = \frac{d}{D} \simeq \alpha$ *(*α *étant petit).*

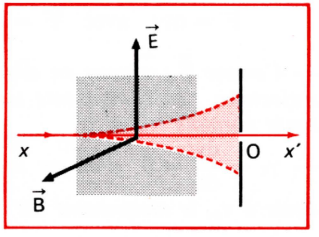
D'où $\frac{d}{D} = \frac{\ell}{R}$ $\quad d = \frac{\ell D}{R} = \frac{e}{m} \cdot \frac{1}{v_0} \cdot B\ell D$: *la déviation est proportionnelle à* B.

- *Application numérique :* $R = 9.10^{-2}$ m $\quad d = 2.10^{-2}$ m $= 2$ cm

---

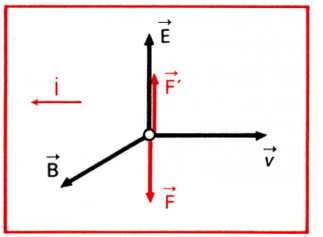
ÉNONCÉ

n° 136. Un faisceau électronique horizontal a pour direction xx'. Ce faisceau est constitué d'électrons qui n'ont pas tous la même vitesse. Ce faisceau traverse un champ électromagnétique uniforme : $\vec{B}$ est horizontal perpendiculaire à xx', $\vec{E}$ est vertical (pour les sens, voir figure). Montrer que seuls les électrons ayant une vitesse déterminée v_0, passent par le trou O situé sur xx'. Evaluer v_0.



● *Considérons l'un de ces électrons qui a un mouvement rectiligne horizontal* xx′. *Il subit une force électrique, verticale, dirigée vers le bas* $\vec{F} = -e\vec{E}$, *de module* $F = eE$. *Il subit une force magnétique* $\vec{F'}$ *perpendiculaire à* $\vec{B}$ *et à* $\vec{v}$, *donc verticale.*
Son sens est donné par la règle des trois doigts (les électrons cheminant de x *vers* x′ *constituent un courant électrique allant de* x′ *vers* x*) : elle est dirigée vers le haut.*
Son module est $F' = evB$ ($\sin \alpha = 1$ *puisque* $\vec{B}$ *est perpendiculairaire à* $\vec{v}$).

● *Ces deux forces s'équilibrent, sinon il y aurait déviation : le mouvement de l'électron est donc rectiligne uniforme (en négligeant l'effet de son poids), leur vitesse est* v_0 *telle que* $ev_0B = eE$ $\quad v_0 = \dfrac{E}{B}$. ∥



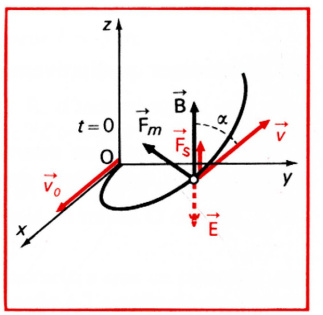
CORRIGÉ

Remarques :

— v_0 ne dépend pas de la charge de la particule électrisée, v_0 ne dépend pas de la masse de la particule électrisée.
— Le faisceau qui sort de O est homocinétique : le champ électromagnétique a joué le rôle de filtre de vitesse.

---

n° 137. Un électron entre dans un champ électromagnétique uniforme à la vitesse $\vec{v_0}$ horizontale, en O. L'induction $\vec{B}$ est verticale dirigée vers le haut, le champ électrique $\vec{E}$, vertical, dirigé vers le bas.
On admettra que la force magnétique $\vec{F_m}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$ et à $\vec{v}$ (vitesse de l'électron) et est égale à $F_m = evB \sin\alpha$ (α angle entre $\vec{B}$ et $\vec{v}$).



ÉNONCÉ

❶ Quel est le mouvement de la projection M de l'électron sur Oz ?

● *L'électron est soumis aux forces électrique* $\vec{F_s}$ *et magnétique* $\vec{F_m}$ *(on néglige son poids).* $\vec{F_s} = -e\vec{E}$: $\vec{F_s}$ *est verticale dirigée vers le haut de module* $F_s = eE$. $\vec{F_m}$ *étant perpendiculaire à* $\vec{B}$ *est horizontale.*

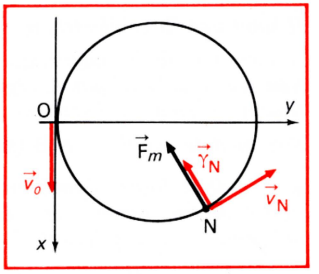
● *Ecrivons la relation fondamentale de la dynamique* $\vec{F_s} + \vec{F_m} = m\vec{\gamma}$ (1).

CORRIGÉ

● *Projetons sur* Oz : $F_s = m\gamma_z \Longrightarrow \gamma_z = \dfrac{eE}{m}$. γ_z *est égale à* z″ *c'est l'accélération de* M, *qui est donc animé d'un mouvement uniformément accéléré. Par intégrations on en déduit* $v_z = \gamma_z t$ *(la constante d'intégration est nulle puisque à l'instant* $t = 0$ $\quad v_z = 0$: *le vecteur* $\vec{v_0}$ *étant horizontal), puis* $z = \dfrac{1}{2}\gamma_z t^2$.

❷ Quel est le mouvement de la projection N de l'électron sur le plan *xOy*.

ÉNONCÉ



● *Projetons l'égalité* (1) $\vec{F_s} + \vec{F_m} = m\vec{\gamma}$, *sur le plan* xOy. $\vec{F_m} = m\vec{\gamma_N}$. *(La projection de* $\vec{F_s}$ *est un vecteur nul* $\vec{F_s}$ *étant perpendiculaire à* xOy.*)*
$\vec{F_m}$ *parallèle à* xOy *se projette en vraie grandeur, soit* $\vec{\gamma_N}$ *la projection de* $\vec{\gamma}$. *D'où* $\vec{F_m} = m\vec{\gamma_N}$.

● *Projetons également le vecteur vitesse* $\vec{v}$, *soit* $\vec{v_N}$ *sa projection.*
Le vecteur $\vec{v}$ *faisant l'angle* α *avec* $\vec{B}$, *le module de* $\vec{v_N}$ *est* $v_N = v \sin \alpha$.

CORRIGÉ

● *Comme* $F_m = evB \sin \alpha = eB\,(v \sin \alpha) = eBv_N \implies \gamma_N = \dfrac{eBv_N}{m}$

$\vec{v_N}$ *comme* $\vec{v}$ *est perpendiculaire à* $\vec{F_m}$ *donc à* $\vec{\gamma_N}$.

● $\vec{\gamma_N}$ *étant perpendiculaire à* $\vec{v_N}$, *l'accélération tangentielle est nulle, le mouvement est donc uniforme* v_N *est constant et égal à* v_0.

● *Considérons l'accélération normale* $\gamma_N = \dfrac{v^2_N}{R} = \dfrac{eBv_N}{m} \implies R = \dfrac{mv_N}{eB} = \dfrac{mv_0}{eB}$: *le rayon de courbure* R *est donc constant.* N *est animé d'un mouvement circulaire uniforme.*

ÉNONCÉ

❸ Déterminer qualitativement la trajectoire de l'électron.

CORRIGÉ

L'électron tourne d'un mouvement de rotation uniforme sur un cylindre vertical tout en s'élevant d'un mouvement accéléré, il décrit une « hélice » dont le pas augmente progressivement.

Contrôles

Pb 44 à Pb 48

Contrôle n° 1. Un condensateur variable rotatif C est formé de 4 lames fixes entre lesquelles s'engagent 3 lames mobiles demi-circulaire de 6 cm de rayon. La distance qui sépare une lame fixe d'une lame mobile est de 0,5 mm. L'angle dont tournent les lames mobiles est repéré par un index se déplaçant devant un cadran gradué de 0° à 180°.

❶ Calculer la capacité maximale du condensateur C (l'index indique alors 180°). La constante diélectrique de l'air $\varepsilon = 1$.

❷ Ce condensateur et une inductance $L = 2.10^{-4}$ H constituent le circuit oscillant d'entrée d'un récepteur de T.S.F. Déterminer les positions de l'index lorsque le circuit est accordé sur les longueurs d'onde 280 m et 560 m ? On supposera que la capacité est proportionnelle aux indications de l'index.

❸ Une station émettrice réglée sur 280 m produit dans le circuit une force électromotrice efficace de 10^{-6} V. Quelle est l'intensité, qui s'établit dans le circuit, supposé réglé sur cette longueur d'onde, sachant que sa résistance ohmique est 0,1 Ω ?

❹ De combien doit-on, à partir du réglage effectué sur la longueur d'onde de 280 m, déplacer l'index du condensateur pour réduire le courant au millième de sa valeur, afin de ne plus entendre l'émission ? Sur quelles longueurs d'onde le circuit sera-t-il alors accordé ?

Contrôle n° 2. Une antenne, S_1, verticale, demi-onde, a pour longueur $l = 3$ m.

❶ Quelle est la fréquence des ondes électromagnétiques émises ?

❷ On veut détecter l'induction $\vec{B}$, à l'aide d'un circuit récepteur R, d'inductance $L = 1$ μH. Quelle doit être la capacité C si l'on veut que le circuit soit accordé ? Comment faut-il orienter le plan du circuit R ?

❸ On place à $a = 18$ m de S_1, une seconde antenne S_2, identique ; les courants H.F. dans S_1 et S_2 sont en phase. Le circuit récepteur R, orienté comme au ❷, est placé au milieu O de S_1S_2. L'intensité efficace du courant est-elle maximale ou minimale ?

❹ Soit un récepteur R′ qui détecte le champ électrique $\vec{E}$. On admettra que ce récepteur est traversé par un courant dont l'intensité efficace I est proportionnelle à l'amplitude du champ électrique.
On dispose ce récepteur R′ sur S_1S_2 à $\lambda/2$ de O. De là, on le déplace horizontalement de façon que l'intensité I reste maximale. Quelle est la nature de la trajectoire qu'il décrit ? Montrer que, à grande distance, r, le récepteur s'éloigne dans une direction fixe, déterminer alors l'angle $\theta = (OS_2, OR')$.

❺ On déplace le récepteur R′ à la distance constante $r = OR'$ de O, r étant très supérieur à a. L'angle $\theta = (OS_2, OR')$ varie de 0 à 180°. Exprimer l'intensité efficace I qui traverse R′ en fonction de θ et de l'intensité efficace maximale I_0.

Contrôle n° 3. Un système électronique entretient des oscillations électriques dans un circuit oscillant constitué par une bobine, d'inductance 5.10^{-6} H, et un condensateur. La fréquence des oscillations est 15 MHz. On prendra $\pi^2 = 10$.

❶ Calculer la capacité du condensateur.

❷ Ce circuit oscillant crée, par induction, un courant alternatif de même fréquence en un point O d'un conducteur électrique rectiligne dans lequel le courant se déplace avec une vitesse de 300 000 km/s. Le conducteur est coupé en un point A tel que OA = 45 m. Les oscillations électriques se réfléchissent en A de telle façon que l'intensité du courant soit constamment nulle

en ce point. A quelles distances de O, entre O et A, les points où l'intensité du courant est nulle se trouvent-ils ?

❸ Ces oscillations sont maintenant émises dans l'espace par l'intermédiaire d'une antenne demi-onde, au milieu O de laquelle est branché le circuit oscillant. Quelle est l'intensité efficace du courant en un point M de l'antenne situé à 3 m de O lorsque l'intensité efficace en O prend la valeur I_0 ?

❹ Deux antennes demi-onde identiques verticales, alimentées par le même oscillateur sont disposées à 500 m l'une de l'autre sur un terrain horizontal. Un observateur muni d'un récepteur radio peut entendre l'émission provenant de ces antennes.

a) L'observateur se trouve à 25 000 m, exactement, de chaque antenne, sur le même plan horizontal. Préciser si l'intensité du son entendu dans le récepteur est maximale ou minimale. Expliciter.

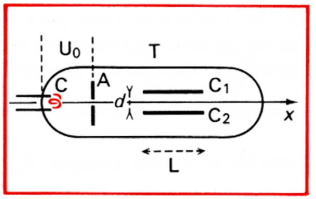
b) L'observateur se déplace parallèlement au plan vertical contenant les antennes. L'intensité du son entendu dans le récepteur varie. Quelle est la distance parcourue par l'observateur lorsque l'intensité du son perçu reprend la même valeur que dans la question précédente ?

(Bac.)

Contrôle n° 4. A l'intérieur d'un tube T, vide de gaz, on produit en C des électrons qui sont accélérés, en direction d'une anode percée, A, par une différence de potentiel U_0 établie entre A et C.

On demande l'énergie cinétique et la vitesse v_0 que possède l'électron lorsqu'il passe en A.

Application numérique : $U_0 = 3\,000$ V; charge électrique de l'électron : $e = 1{,}6.10^{-19}$ C; masse de l'électron : $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg.



❶ *Déflexion électrostatique.* — Sur le trajet C*x* on place un condensateur plan dont les armatures, C_1 et C_2, de longueur L, sont équidistantes de C*x* et séparées entre elles par une distance *d*; une différence de potentiel U est établie entre les deux armatures.

a) Etudier le mouvement d'un électron qui entre dans le condensateur suivant C*x* et le traverse. Etablir l'équation de la trajectoire.

b) Exprimer la déviation angulaire, α, de l'électron (c'est-à-dire l'angle que font entre eux les vecteurs vitesse à la sortie et à l'entrée du champ électrique) et la déviation linéaire, *y*, à la sortie, en fonction de U_0, U, *d* et L.

Application numérique : U = 600 V, $d = 0{,}1$ m et L = 0,2 m.

❷ *Déflexion magnétique.* — On remplace le champ électrique par un champ magnétique uniforme d'induction $\vec{B}$, agissant sur la même région de l'espace de longueur L.

Quels seront la direction, le sens et l'intensité de $\vec{B}$ pour que la déviation linéaire, *y*, à la sortie du champ magnétique soit la même que pour le champ électrique ?

(On rappelle qu'un électron de charge *e*, animé d'une vitesse $\vec{v}$ perpendiculaire à $\vec{B}$, est soumis à une force $\vec{F}$ normale au plan $(\vec{v}, \vec{B})$, tel que le trièdre $\vec{F}, \vec{B}, \vec{v}$ soit direct, l'intensité de cette force est donnée par $F = Bev$.)

Dans les calculs on admettra que α est suffisamment petit pour autoriser les approximations usuelles.

❸ *Sélecteur de vitesse.* — On superpose au champ électrique décrit au paragraphe ❶, un champ magnétique uniforme, agissant sur la même distance L, tel que les effets de ces champs s'annulent.

a) Quels seront, dans ce cas, la direction, le sens et l'intensité de la nouvelle induction $\vec{B}'$?

b) Trouver une relation simple entre v_0, B′ et le champ électrique E.

c) On envoie à l'entrée du dispositif ainsi réalisé des particules électrisées de nature et de vitesses diverses. Indiquer un phénomène remarquable qui va se produire lors de la traversée du dispositif et en déduire une application intéressante. *(Bac.)*

Contrôle n° 5. Le filament de tungstène d'une diode est porté à la température T = 2 500 °K.

❶ L'énergie dont a besoin un électron pour sortir du filament (énergie d'extraction) est $W_s = 7{,}2.10^{-19}$ J.

a) Evaluer cette énergie en électrons-volts.

b) Calculer la vitesse minimale que doit posséder un électron libre à l'intérieur du métal pour être éjecté.

Charge d'un électron : $e = -1{,}6.10^{-19}$ C.

Masse d'un électron, supposée constante : $m = 9.10^{-31}$ kg.

❷ Un électron quitte le filament avec une vitesse nulle. En face du filament et à la distance $d = 1$ cm est une plaque portée à un potentiel de 100 V par rapport au filament.

On fera les calculs comme si le champ électrique entre la plaque et le filament était uniforme.

a) A quelle force électrique l'électron sorti du filament est-il soumis? Comparer cette force au poids de l'électron si l'accélération de la pesanteur est $g = 10$ m/s². Peut-on négliger ce poids vis-à-vis de la force électrique?

b) Avec quelle vitesse, *v*, l'électron atteint-il la plaque? Quelle est la durée du trajet entre le filament et la plaque?

c) Quels seraient les deux résultats de la question précédente ❷, *b*) si l'électron sortait du filament avec la vitesse $v' = 1\,000$ km/s?

❸ L'intensité du courant fourni par cette diode est $I = 16.10^{-3}$ A.

a) Quel est le nombre d'électrons atteignant la plaque par seconde?

b) Sachant que le courant de saturation varie, en fonction de la température absolue du filament, suivant la loi $I = KT^2\left(1 + \frac{T}{5\,000}\right)$, quelle est la variation relative de ce courant de saturation pour une variation de température du filament de 2 degrés?

(Partie Bac.)

Contrôle n° 6.

❶ Des protons, initialement au repos, sont accélérés dans une chambre vide par une différence de potentiel U, quelle est l'expression de l'énergie cinétique acquise par un proton de charge $q = 1{,}6.10^{-19}$ C et de masse $M_H = 1{,}67.10^{-27}$ kg? Quelle devrait être la différence de potentiel U qui communiquerait aux protons la vitesse $v_H = 3\,500$ km/s?

❷ Un faisceau de protons homocinétiques, de vitesse $v_H = 3\,500$ km/s, traverse un condensateur plan, parallèlement aux armatures A et B, dont la longueur est $l = 1$ m et la distance $d = 20$ cm. La différence de potentiel entre les armatures est $U_{AB} = 2\,000$ V. Le champ électrique entre les plateaux est uniforme. Exprimer la déviation angulaire du faisceau en fonction de *l*, *d*, U_{AB}, v_H, *q* et M_H. Calculer le déplacement vertical d'un proton à la sortie du champ.

❸ Ce faisceau de protons pénètre avec la vitesse $\overrightarrow{v_H}$ dans une chambre vide, où ils sont soumis à l'action d'un champ magnétique uniforme d'induction, $\vec{B}$, perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{v_H}$ et dont l'intensité est 1 tesla.

Montrer que la trajectoire décrite par un proton est un cercle, dont on définira le plan et dont on calculera le rayon.

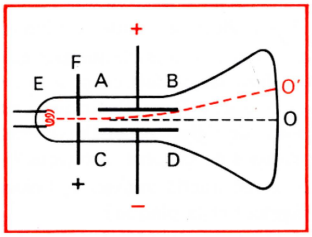
❹ *a*) Un neutron de masse μ, appartenant à un faisceau de neutrons qui possèdent tous la même vitesse *v* rencontre un proton au repos. En admettant que le choc est parfaitement élastique, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de perte d'énergie, écrire les équations régissant ce choc neutron-proton. Si l'on désigne par $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ les vitesses du neutron avant et après le choc et par $\overrightarrow{v_H}$ la vitesse du proton après le choc, en admettant que ces vitesses sont colinéaires exprimer la vitesse v_H en fonction de *v* et des masses des particules.

b) Un autre neutron identique rencontre un noyau d'azote au repos, de masse M_N, et lui communique dans les mêmes conditions une vitesse $\overrightarrow{v_N}$. Exprimer, comme précédemment, la vitesse v_N prise par le noyau d'azote.

c) Les vitesses des neutrons sont inobservables, car les neutrons ne laissent aucune trace de leur trajectoire. Déduire des expériences *a*) et *b*) la relation qui permet de calculer la masse, μ, du neutron en fonction du rapport $\rho = \frac{v_H}{v_N}$ et des masses M_H et M_N.

(La question ❹ ne comporte pas d'application numérique.) *(Bac.)*

Contrôle n° 7.



❶ Dans un tube à vide, on produit des électrons en E (cathode). On négligera leur vitesse de sortie en E. Ces électrons sont accélérés par une anode F et acquièrent ainsi en F la vitesse $v_0 = 40\,000$ km/s. Sachant que la charge d'un électron est $e = 1{,}6.10^{-19}$C et que sa masse (supposée indépendante de sa vitesse) est $m = 9.10^{-28}$ g, calculer la différence de potentiel entre l'anode et la cathode.

❷ On concentre le faisceau électronique sur une plaque de platine d'épaisseur 1 mm et de surface 1 cm². En une minute la température du platine s'élève de 20 °C à 1 770 °C (température de fusion). Calculer le nombre n des électrons émis par seconde par la cathode et l'intensité du courant qui traverse le tube.
On donne : chaleur massique du platine : 0,035 cal/g; densité du platine : 21,4. On suppose que toute l'énergie transportée par le faisceau est convertie en chaleur.

❸ Le faisceau horizontal de rayons d'électrons, convenablement diaphragmé, passe entre les armatures AB et CD d'un condensateur plan, puis va frapper un écran fluorescent produisant ainsi une petite tache lumineuse.
S'il n'existe aucune différence de potentiel entre les plateaux, la tache lumineuse est en O; lorsqu'on établit une différence de potentiel convenable, le faisceau est dévié et la tache vient en O'. Dans son parcours entre les plateaux AB et CD chaque électron est alors soumis à une force verticale égale à 18×10^{-15} N; AB = CD = 2 cm et l'extrémité BD du condensateur est à 24 cm de O.

a) Etudier la trajectoire des électrons entre les plateaux du condensateur.

b) En déduire la déviation OO'. On admettra qu'à l'entrée du condensateur la vitesse des électrons est égale à 40 000 km/s. *(Bac.)*

Effet photo-électrique

Pb 49

n° 138.

ÉNONCÉ

❶ Le seuil photoélectrique de la cathode d'une cellule, se situe à $\lambda_0 = 0{,}60\ \mu$. Evaluer le travail d'extraction d'un électron en joules puis en électrons-volts. $e = 1{,}6.10^{-19}$C. Constante de Planck $h = 6{,}6.10^{-34}$ unité SI.

CORRIGÉ

● *Soit* ν *la fréquence de radiation. Le faisceau est constitué par des photons qui transportent un quantum d'énergie* $W = h\nu$. *Pour qu'un photon puisse extraire un électron il faut que* $h\nu \geqslant W_0$ (W_0 *étant le travail d'extraction). Dans le cas limite* $W_0 = h\nu_0$ *comme*

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} \qquad W_0 = h\frac{c}{\lambda_0}.$$

● *Numériquement* $W_0 = \dfrac{6{,}6.10^{-34} \times 3.10^{8}}{0{,}6.10^{-6}} = 3{,}3.10^{-19}$ J. *Comme* 1 eV $= 1{,}6.10^{-19}$ J

le travail d'extraction est mesuré en électrons-volts par $W_0 = \dfrac{3{,}3.10^{-19}}{1{,}6.10^{-19}} = 2{,}06$ eV.

ÉNONCÉ

❷ La cellule est éclairée par un faisceau de longueur d'onde $\lambda = 0{,}50\ \mu$. Quelle est la vitesse maximale de sortie des électrons de la cathode ? masse de l'électron $m = 9.10^{-31}$ kg.

CORRIGÉ

● *Lorsque la longueur d'onde du rayonnement est la longueur d'onde* λ_0 *du seuil photoélectrique, les électrons sortent à vitesse nulle. Lorsque la longueur d'onde est* $\lambda < \lambda_0$, *les photons sont plus énergétiques et peuvent expulser les électrons avec une certaine vitesse initiale. Dans les meilleures conditions l'excédent d'énergie du photon apparaît sous forme d'énergie cinétique communiquée à l'électron :*

$$h\nu = W_0 + \frac{1}{2}mv^2 \qquad d'où \qquad \frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W_0 \qquad avec \qquad \nu = \frac{c}{\lambda}.$$

● *Application numérique :* $\dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{6{,}6.10^{-34}.3.10^{8}}{5.10^{-7}} - 3{,}3.10^{-19} = 6{,}6.10^{-20}$J

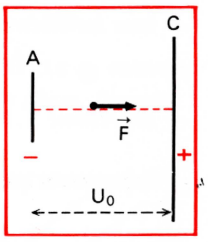
d'où $v = \sqrt{\dfrac{6{,}6.10^{-20} \times 2}{9.10^{-31}}} = 3{,}83.10^{+5}$ m/s $= 383$ km/s

ÉNONCÉ

❸ Déterminer la valeur du potentiel d'arrêt U_0 ? (λ reste égal à 0,50 μ).

CORRIGÉ

● *Supposons la cellule réglée au potentiel d'arrêt* U_0 *: la plaque photo-émissive* C *est à un potentiel positif par rapport à la boucle qui capte les électrons* A. *Seuls les électrons partant de* C *avec l'énergie cinétique maximale (et étant dirigés vers* A*) arrivent en* A *à vitesse nulle. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre* C *et* A : $\Delta E_C = \overline{W}$, *négligeons le travail du poids de l'électron* $\overline{W} = -eU_0$ *(travail résistant de la force électrique)*



d'où $0 - \dfrac{1}{2}mv^2 = -eU_0$. *D'où* $U_0 = \dfrac{mv^2}{2e}$.

● *Numériquement* $\dfrac{1}{2}mv^2 = 6{,}6.10^{-20}$ J (2^e *question*), *d'où* $U_0 = \dfrac{6{,}6.10^{-20}}{1{,}6.10^{-19}} = 0{,}41$ V.

ÉNONCÉ

❹ La longueur d'onde reste égale à $\lambda = 0{,}50\ \mu$. La tension appliquée à la cellule est égale à $U = 50$ V (la plaque photo-émissive étant polarisée négativement par rapport à la boucle qui capte les électrons).

a) Quelle est l'énergie cinétique maximale des électrons arrivant sur la boucle anode?

CORRIGÉ

● *Les électrons qui ont l'énergie cinétique maximale à l'arrivée sur l'anode sont ceux qui partent de la plaque (cathode) avec une énergie cinétique maximale.*

● *Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :*

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = eU \qquad d'où \qquad \frac{1}{2}mv^2 = eU + \frac{1}{2}mv_0^2.$$

● *Application numérique* $\frac{1}{2}mv_0^2 = 6{,}6.10^{-20}$ J (2e *question*), *d'où* $\frac{1}{2}mv^2 = 8{,}07.10^{-18}$ J.

Nous remarquons que l'énergie cinétique de sortie de la plaque est pratiquement négligeable.

ÉNONCÉ

b) La cathode reçoit une puissance constante $\mathcal{J} = 0{,}4$ mW sous forme rayonnante. L'intensité du courant de saturation obtenu est $I = 1{,}6\ \mu$A. Déterminer le pourcentage de photons « utiles » c'est-à-dire qui expulsent un électron.

CORRIGÉ

● *A partir de la puissance rayonnante* $\mathcal{J}$ *on trouve le nombre de photons* n *arrivant par seconde sur la plaque :* $n.h\nu = \mathcal{J} \Longrightarrow n = \dfrac{\mathcal{J}}{h\nu}$.

● *A partir de l'intensité de saturation* I *on trouve le nombre d'électrons* n′ *émis par la plaque par seconde.* $n'e = I \Longrightarrow n' = \dfrac{I}{e}$.

● *D'où le rendement ou pourcentage de photons utiles* $\dfrac{n'}{n} = \dfrac{I.h.\nu}{\mathcal{J}.e} \simeq 0{,}01 = 1\ \%$.

ÉNONCÉ

c) Quelle est la puissance calorifique $\mathcal{P}$ dissipée par l'anode?

CORRIGÉ

● *On ne peut faire un calcul rigoureux car tous les électrons arrivant sur l'anode n'ont pas la même énergie cinétique. Calculons les deux possibilités extrêmes :*

— *tous les électrons sortent de la plaque à vitesse nulle. Dans ce cas la puissance* $\mathcal{P}$ *reçue par l'anode est* $\mathcal{P} = n'.eU = IU = 8.10^{-5}$ W, *elle provient du générateur électrique ;*

— *tous les électrons arrivent sur l'anode avec l'énergie cinétique maximale calculée à la question* ❹ a). *D'où* $\mathcal{P} = n'.8{,}07.10^{-18} = \dfrac{1{,}6\ .\ 10^{-6}}{1{,}6.10^{-19}}.8{,}07.10^{-18} = 8{,}07.10^{-5}$ W.

— *En résumé* $8.10^{-5}\ W < \mathcal{P} < 8{,}07.10^{-5}$ W.

● *Remarquons que le générateur électrique fournit* 8.10^{-5} W *et le rayonnement l'excédant.*

Rayons X

n° 139. Entre la cathode et l'anticathode d'un tube à rayons X on maintient une tension $U = 10^5$ V. Quelle est la longueur d'onde minimale des rayons X émis ? Constante de Planck $h = 6{,}6.10^{-34}$ *u* SI $e = 1{,}6.10^{-19}$ C.

ÉNONCÉ

- *Les électrons qui arrivent sur l'anticathode ont l'énergie cinétique* $E_c = eU$
- *Considérons le cas limite où toute cette énergie est transformée en énergie rayonnante, l'énergie du photon* X *émis est alors* $W = E_c$. *Soit* ν *la fréquence de la radiation correspondante :* $h\nu = eU$ *d'où* $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{eU}$

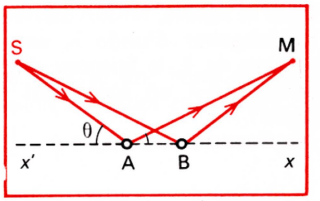
CORRIGÉ

- *Numériquement* $\lambda = \frac{6{,}6.10^{-34}.3.10^8}{1{,}6.10^{-19}.10^5} = 1{,}24.10^{-11}$ m $= 0{,}124$ Å. *Par suite le faisceau de rayons* X *émis est constitué de rayonnements de* $\lambda \geqslant 0{,}124$ Å.

---

n° 140.

❶ Une source S envoie un rayonnement X de longueur d'onde λ, qui se diffracte sur deux points A et B, puis interfère en M. $\widehat{SAx'} = \widehat{MAx} = \theta$. S et M sont loin de AB, SA et SB sont de ce fait pratiquement parallèles, MA et MB également. Montrer que les radiations qui interfèrent en M sont en phase. Qu'en résulte-t-il ?

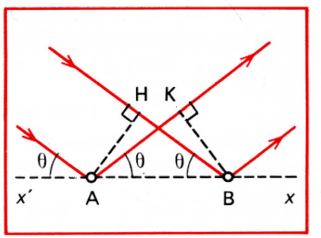


ÉNONCÉ

- *Evaluons la différence de marche :*

$$\delta = (SB + BM) - (SA + AM)$$
$$= (SB - SA) - (MA - MB)$$

- *Pour déterminer la différence* (SB — SA) *traçons le cercle de centre* S, *de rayon* SA, *il coupe* SB *en* H : SB — SA = HB. *L'arc* AH *est normal à* SB; *petit, il est pratiquement rectiligne.* AHB *est donc un triangle rectangle.*



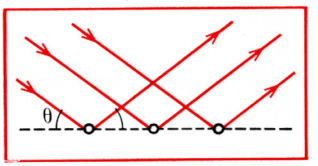
CORRIGÉ

- *De même* MA — MB = KA. *Dans les triangles rectangles* AHB *et* AKB :

$$HB = AB \cos\theta \qquad KA = AB \cos\theta \qquad \text{d'où} \quad HB = KA.$$

- *En résumé* $\delta = HB - KA = 0$. *Les ondes qui interfèrent sont donc en phase, l'amplitude de la radiation résultante est maximale.*

❷ Un faisceau de rayons X, parallèles, provenant d'une source éloignée, S, est diffracté sur les atomes d'une face cristalline. Le faisceau diffracté repart, sous le même angle θ, ses rayons interfèrent en un point M éloigné. Montrer qu'on enregistre un maximum d'intensité en M.



ÉNONCÉ

CORRIGÉ

Comme dans le paragraphe précédent, toutes les vibrations X *sont en phase en* M, *donc leurs amplitudes s'ajoutent pour donner l'amplitude de la vibration résultante.*

ÉNONCÉ

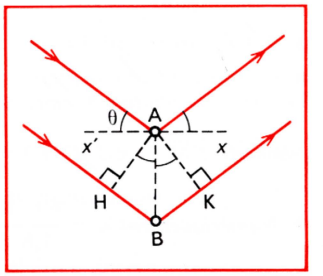
❸ On reprend la question du ❶, mais AB est maintenant perpendiculaire à xx'. Quelle relation doivent vérifier a = AB, λ et θ si l'on veut que les radiations qui interfèrent en M soient en phase ?

CORRIGÉ

● *Evaluons la différence de marche :*

$$\delta = (SB + BM) - (SA + AM)$$
$$= (SB - SA) + (MB - MA)$$

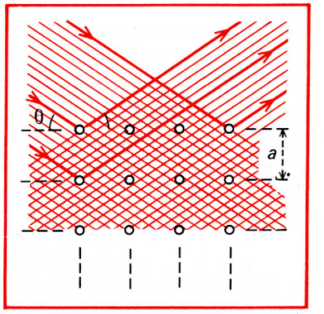
Comme au ❶ SB — SA = HB ; MB — MA = KB
Dans le triangle rectangle ABH : HB = a sin θ, *de même dans le triangle rectangle* ABK : KB = a sin θ, *par suite* $\delta = 2$ a sin θ.



● *Les radiations sont en phase lorsque* $\delta = k\lambda$ *c'est-à-dire lorsque* $2a \sin \theta = k\lambda$. *Cette relation est connue sous le nom de « condition de Bragg ».*

ÉNONCÉ

❹ Sur un cristal dont les atomes sont équidistants de a (voir la figure), on fait arriver un faisceau de rayons X, de longueur d'onde λ, sous l'angle θ. Pour quelles valeurs de θ, le faisceau diffracté sous le même angle produira-t-il un maximum d'intensité à grande distance ?
Application numérique $a = 3$ Å $\lambda = 1$ Å.



● *D'après les résultats des questions* ❷ *et* ❸ *les rayons diffractés vers* M *à grande distance donneront, en interférant, un maximum d'intersité lorsque* $2a \sin \theta = k\lambda$ *d'où* $\sin \theta = \dfrac{k\lambda}{2a}$.

CORRIGÉ

● *Application numérique* $\sin \theta = \dfrac{k}{6}$.

Comme $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ $\quad 0 \leqslant \sin \theta \leqslant 1$ $\quad 0 \leqslant \dfrac{k}{6} \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant k \leqslant 6.$

d'où $\sin \theta \in \{0{,}167\,;\ 0{,}333\,;\ 0{,}5\,;\ 0{,}667\,;\ 0{,}833\,;\ 1\}$ *d'où*
$\theta \in \{9°30'\,;\ 19°30'\,;\ 30°\,;\ 42°\,;\ 56°30'\,;\ 90°\}$.

Lorsque $\theta = 0$ *la transmission directe masque la diffraction*

Masse et énergie - Radioactivité

Pb 51
Pb 52

n° 141. Etudions la fission de l'uranium 235. Bombardé par un neutron ${}^{1}_{0}n$, un noyau d'uranium 235 éclate en fragments avec libération de 2 ou 3 neutrons qui peuvent à leur tour agir sur des noyaux d'uranium 235.

ÉNONCÉ

❶ Parmi les réactions d'éclatement citons :

$${}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{A}_{54}Xe + {}^{95}_{Z}Sr + 2{}^{1}_{0}n.$$

$${}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{148}_{57}La + {}^{A'}_{Z'}Br + 3{}^{1}_{0}n.$$

Déterminer A, Z, A′ et Z′.

CORRIGÉ

● *Quand on écrit une réaction nucléaire nous n'étudions pas les cortèges électroniques qui se réorganisent autour des noyaux. Une réaction nucléaire est équilibrée lorsqu'il y a conservation du nombre de masse et du nombre de charge.*

● *Ainsi*

$$\begin{aligned} 92 + 0 &= 54 + Z + 0 \quad &\Longrightarrow Z &= 38 \\ 235 + 1 &= A + 95 + 2 \quad &\Longrightarrow A &= 236 - 97 = 139 \\ 235 + 1 &= 148 + A' + 3 \quad &\Longrightarrow A' &= 236 - 151 = 85 \\ 92 + 0 &= 57 + Z' + 0 \quad &\Longrightarrow Z' &= 92 - 57 = 35. \end{aligned}$$

ÉNONCÉ

❷ La fission d'un noyau d'uranium 235 se fait en moyenne avec une perte de masse de 0,21 *u.m.a.* Quelle est l'énergie W libérée par cette fission en joules et en MeV. Le nombre d'Avogadro est $N = 6{,}02.10^{23}$.

CORRIGÉ

● $1 \text{ u.m.a} = \dfrac{1}{N}\text{g} = \dfrac{1}{6{,}02.10^{23}}\text{g} = 1{,}66.10^{-24}\text{ g} = 1{,}66.10^{-27}\text{ kg}.$

● *La perte de masse* $m = 0{,}21$ u.m.a. $= 0{,}21.1{,}66.10^{-27}$ kg $= 3{,}49.10^{-28}$kg *s'accompagne du dégagement d'énergie* $W = mc^2 = 3{,}49.10^{-28} \times 910^{16} = 3{,}14.10^{-11}$ *joule c'est-à-dire* $\dfrac{3{,}14.10^{-11}}{1{,}6.10^{-19}} = 1{,}96.10^{8}$ eV $= 196$ MeV *(méga électron-volts)*.

---

n° 142.

ÉNONCÉ

Un échantillon de radium pur a pour masse $m = 4$ mg. De combien d'atomes, n_0, est-il constitué. $Ra = 226$. Nombre d'Avogadro $N = 6.10^{23}$.

CORRIGÉ

Il y a dans 226 g *de radium* 6.10^{23} *atomes, donc* $n_0 = \dfrac{4.10^{-3}.6}{226}.10^{23} = 1{,}06.10^{19}$.

ÉNONCÉ

❷ La demi-vie du radium est $T = 1680$ ans. Combien restera-t-il de noyaux non désintégrés au bout de ce laps de temps?

CORRIGÉ

La moitié de la « population » est désintégrée pendant une demi-vie, il reste donc $\dfrac{n_0}{2} = 5{,}3.10^{18}$ *noyaux soit* 2 mg *de radium.*

ÉNONCÉ

❸ Soit n le nombre de noyaux radium non désintégrés à l'instant t. A $t = 0$ $n = n_0$. Pendant l'intervalle de temps $[t, t + dt]$ il se désintègre $\lambda . n . dt$ noyaux. Evaluer la constante radioactive λ.

CORRIGÉ

● *A l'instant* t *il reste* n *noyaux ;*
à l'instant t + dt *il reste* n + dn = n — λndt *noyaux.*

D'où $$dn = -\lambda n dt \Longrightarrow \frac{1}{n}\frac{dn}{dt} = -\lambda.$$

● *Intégrons* $\text{Log } n = -\lambda t + C$ *à* $t = 0$ $\text{Log } n_0 = C$,

d'où $\text{Log } \frac{n}{n_0} = -\lambda t$ *à* $t = T$ *nous savons que* $n = \frac{n_0}{2}$

d'où
$$\text{Log } \frac{1}{2} = -\lambda T \Longrightarrow -\text{Log } 2 = -\lambda T \Longrightarrow \lambda = \frac{\text{Log } 2}{T} = \frac{2{,}30 \times 0{,}301}{1680 . 365 . 86400} = 1{,}3 . 10^{-11} s^{-1}.$$

ÉNONCÉ

❹ Quelle masse de radium, de l'échantillon considéré au ❶, a disparu au bout de un an ?

CORRIGÉ

L'intervalle de temps considéré est faible comparé à la période, donc $dn = -\lambda n_0 dt$ *avec* dt = 1 an. *Multiplions par la masse d'un atome, la masse de radium disparu est alors :*
$|dm| = \lambda m_0 dt = 1{,}3 . 10^{-11} \times 4 . 10^{-6} \times 365 \times 86400 = 1{,}64 . 10^{-9}$ kg $= 1{,}64 . 10^{-3}$ mg.

ÉNONCÉ

❺ Pendant cet intervalle de temps, l'échantillon a libéré une quantité de chaleur $W = 2{,}05 . 10^4$ J. Evaluer la variation relative de masse produite par la réaction nucléaire

$$Ra \Longrightarrow Rn + He.$$

CORRIGÉ

● *Soit* Δm *la perte de masse qui s'accompagne du dégagement d'énergie* W, *d'après la relation d'Einstein* $W = \Delta m . c^2. \Longrightarrow \Delta m = \frac{W}{c^2}$.

● *Soit* m_D *la masse de radium qui s'est désintégrée pendant l'intervalle de temps (un an) Nous avons calculé* m_D *à la question* ❹ $m_D = 1{,}64 . 10^{-9}$ kg.

● m_D *subit une perte de masse* Δm, *la variation relative de masse du radium qui s'est désintégré est donc*

$$\frac{\Delta m}{m_D} = \frac{W}{m_D c^2} = \frac{2{,}05 . 10^4}{1{,}64 . 10^{-9} \times 9 . 10^{16}} \simeq 1{,}4 . 10^{-4}.$$

Remarque : ne pas confondre la variation de masse due à la libération d'énergie Δm et la variation de masse du radium due à la désintégration m_D.

Contrôle n° 1.

❶ *a*) Ecrire l'expression de l'énergie, W, communiquée à la charge électrique, e, par une différence de potentiel, U.
b) Montrer que l'électron-volt vaut $1{,}6.10^{-19}$ J.

❷ Pour extraire un négaton d'une couche photo-émissive, M, il faut lui fournir une énergie W_0 de 1,35 électron-volt. Cette extraction est obtenue en éclairant la couche M par une radiation monochromatique de fréquence, N.
a) Calculer la fréquence, N_0, au-dessous de laquelle l'extraction est impossible (seuil photo-électrique).
b) Quelle est la longueur d'onde, λ_0, de cette radiation limite? Comment se place-t-elle dans l'ensemble des radiations électromagnétiques?
c) La radiation de fréquence N_0 éclaire une cellule photo-électrique à vide dont la cathode est constituée par la couche photo-émissive M; on établit alors entre l'anode et la cathode une différence de potentiel U = 36 V. Calculer la vitesse maximale v_1 des négatons arrivant sur l'anode.

❸ On éclaire la cellule photo-électrique avec une radiation monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0{,}240\ \mu$.
a) Quelle est la valeur du potentiel d'arrêt U_0?
b) Quelle est la vitesse maximale v_0 des négatons émis par la photo-cathode?
c) La différence de potentiel entre anode et cathode étant toujours 36 V, quelle est la vitesse maximale v_2 des négatons arrivant sur l'anode?
d) Le courant photo-électrique est $2{,}5.10^{-9}$ A. Quel est le nombre de négatons émis par seconde par la photo-cathode?
On donne :
Charge du négaton : $e = -1{,}6.10^{-19}$ C.
Masse du négaton : $m = 9.10^{-31}$ kg.
Constante de Plank : $h = 6{,}62.10^{-34}$ unité SI.
Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8$ m/s. *(Bac.)*

Contrôle n° 2.

A. Un proton de masse m de charge e, se déplaçant à la vitesse v subit l'action d'un champ d'induction $\vec{B}$, normal à v; le proton décrit à vitesse constante un arc de cercle de rayon r.

❶ Donner l'expression de r en fonction de e, B, v et m.

❷ Montrer que l'énergie cinétique W du proton peut s'écrire $W = \dfrac{(erB)^2}{2m}$ et calculer W, en joules, pour $r = 0{,}8$ m, $B = 0{,}5$ T, $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C et $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg.

❸ Une particule, α, animée d'une vitesse $\vec{V}$ rencontre un proton supposé immobile. Montrer que ce dernier, s'il est projeté dans la direction de la vitesse $\vec{V}$, part avec une vitesse de module 1,6 V; on rappelle qu'une particule α est un noyau d'hélium, ${}_2^4He^{++}$.
On suppose les particules ponctuelles, les chocs parfaitement élastiques et les vitesses assez éloignées de la vitesse de la lumière pour que les lois de la Mécanique classique restent applicables.

B. ❶ On admet que lorsqu'un électron passe d'une orbite à une autre, il y a émission d'un photon donc émission d'énergie lumineuse sous forme d'un rayonnement de fréquence ν. On se propose de calculer cette énergie. A cet effet, on détermine la fréquence ν du rayonnement obtenu au moyen d'une expérience d'interférences lumineuses, comme s'il s'agissait d'un rayon de lumière monochromatique. On utilise le dispositif des fentes d'Young. Celles-ci sont distantes de 2 mm. L'écran où sont observées les franges est à 1 m des fentes. On mesure la distance de la

frange centrale numérotée 0, à la frange numérotée 5; on trouve $l = 1{,}25$ mm. En déduire la fréquence ν de la radiation et l'énergie accompagnant l'émission du photon.
On donne la constante de Planck : $h = 6{,}62 \times 10^{-34}$ J.s et la vitesse de la lumière : 300 000 km/s.

❷ La modification des couches électroniques décrite précédemment peut être obtenue en bombardant un atome métallique par des électrons soumis à une tension accélératrice U.
On suppose que toute l'énergie d'un électron accéléré sous la tension U se retrouve dans l'énergie du photon. Montrer que la longueur d'onde λ du rayonnement obtenu et la tension U sont reliées par la relation $\lambda \times U = \text{constante}$.
Evaluer cette constante dans le système international. On donne U = 30 000 V. Calculer λ. De quel rayonnement s'agit-il ? *(Bac.)*

Contrôle n° 3. Dans un tube électronique les électrons, sans vitesse initiale, sont accélérés par une différence de potentiel U.

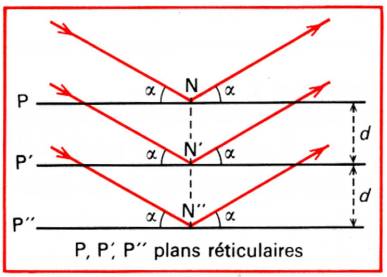
❶ *a*) Etablir la relation donnant la vitesse des électrons.
Application numérique : Masse de l'électron, supposée constante : $m_0 = 0{,}9 \times 10^{-30}$ kg; charge de l'électron en valeur absolue : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C; U = 10 000 V.
b) Quelle est l'énergie d'un électron ainsi accéléré (en joules et en électrons-volts) ?

❷ Ce faisceau d'électrons tombe sur une anticathode métallique de masse $m = 100$ g. Après $t = 5$ s de fonctionnement la température de cette anticathode s'élève de $\Delta\theta = 100$ °C. La chaleur massique du métal est $C = 0{,}037$ kcal.kg^{-1}.°C^{-1}.
Sachant que 98 % de l'énergie transportée sert à échauffer l'anticathode :
a) Calculer le nombre d'électrons reçus par l'anticathode;
b) Calculer la limite inférieure de la longueur d'onde des rayons X émis, ainsi que leur fréquence maximale.

Constante de Planck : $h = 6{,}62.10^{-34}$ u SI
Vitesse de la lumière : $c = 300\,000$ km/s.

On rappelle que 1 kcal, en se transformant en travail, donne 4 180 J.

❸ Un cristal se comporte comme une série de plans parallèles équidistants séparés par le vide, appelés plans réticulaires. Ces plans sont capables de réfléchir chacun une partie des rayons X.
Un faisceau parallèle de rayons X de longueur d'onde 1,24 Å tombe sur un cristal en faisant un angle α avec les plans réticulaires : le faisceau parallèle réfléchi est symétrique du faisceau incident par rapport à la normale NN'N'' et son intensité est maximale lorsque les différents points situés dans un plan perpendiculaire au faisceau réfléchi sont en phase.



P, P', P'' plans réticulaires

(Les points situés dans un plan perpendiculaire au faisceau parallèle incident de rayons X seront supposés en phase.)
a) Calculer la différence de marche entre deux rayons parallèles correspondant à deux plans réticulaires voisins (P et P' par exemple).
b) A quelle condition les valeurs de l'angle α doivent-elles obéir pour que l'intensité du faisceau parallèle réfléchi par l'ensemble des plans réticulaires soit maximale dans la direction α ?
c) Quelle est la distance de deux plans voisins si le plus petit angle α obéissant à la condition précédente est 13° ? *(Bac)*

Contrôle n° 4. A. Un corps radioactif émet des noyaux de l'atome d'hélium $^4_2$He avec une vitesse $v_0 = 15\,000$ km/s.

❶ Sachant que l'émetteur est le radium $^{226}_{88}Ra$, quels sont le numéro atomique et le nombre de masse du nouveau noyau formé après émission d'une particule α ?

❷ Calculer, en joules, puis en électrons-volts, l'énergie cinétique d'un noyau d'hélium. On donne :

— masse d'un noyau d'hélium : $m = \dfrac{4}{6 \times 10^{23}}$ g,

— charge de l'électron : $1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

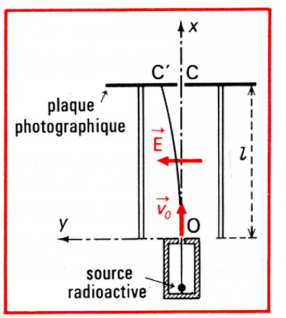
❸ Calculer la variation relative de masse de la particule α, animée de la vitesse v_0, si sa masse à cette vitesse est donnée par la formule

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}}}.$$

(m_0 est la masse de la particule au repos et $c = 300\,000$ km/s. On remarquera que $\dfrac{v_0}{c}$ est petit par rapport à 1.) On ne tiendra pas compte de cette variation dans la suite.

❹ Etablir que la valeur numérique du rapport, $\dfrac{q}{m}$, de la charge électrique à la masse d'une particule α est $4{,}8 \times 10^7$ C/kg.

B. Le corps radioactif, de dimensions négligeables, est placé au fond d'une cavité étroite, en plomb. Les particules α abordent en O, avec une vitesse $v_0 = 15\,000$ km/s ($\vec{v_0}$ est vertical), le champ électrique uniforme $\vec{E}$ existant entre les armatures verticales d'un condensateur plan placé dans le vide. Une plaque photographique, placée contre le condensateur, normalement à la vitesse initiale $\vec{v_0}$, permet d'observer le déplacement du point d'impact de C en C′ lorsqu'on établit entre les armatures la différence de potentiel créant le champ $\vec{E}$. On rappelle qu'une charge électrique q est soumise, dans un champ $\vec{E}$, à la force $\vec{F} = q\vec{E}$. Le poids de la particule α est négligeable devant $\vec{F}$.



❶ Etablir les expressions, en fonction du temps t, des coordonnées de la particule α passant en O au temps $t = 0$.
Quelle est la nature de la trajectoire ?
Calculer CC′ si $l = OC = 57$ cm et $E = 3 \cdot 10^6$ V/m.

❷ Déterminer les composantes selon Ox et Oy du vecteur vitesse $\vec{v}$ de la particule en C′. Calculer l'accroissement de l'énergie cinétique de la particule entre O et C′. En déduire le travail de la force électrique appliquée à la particule entre O et C′.

❸ Etablir, en utilisant la définition du travail d'une force, que le travail de la force électrique appliquée à la particule α de O en C′ a pour expression $qE \times CC'$. Vérifier le résultat précédent.

C. Une particule α aborde en O le champ électrique E avec la même vitesse $v_0 = 15\,000$ km/s, mais celle-ci fait avec Ox l'angle $\theta = (\vec{Ox}, \vec{v_0})$. Déterminer CC′ en fonction de θ et des données des questions précédentes.

Application numérique : *a*) simplifier l'expression de CC′ dans le cas où l'angle θ est faible ($tg\theta = \theta$ et $\cos^2\theta = 1$).

b) Calculer CC′ quand $\theta = 0{,}5°$

c) Calculer CC′ quand $\theta = -0{,}5°$. *(Bac.)*

Contrôle n° 5. Soit une particule de petites dimensions, de charge électrique $+q$, de masse m, lancée horizontalement à très grande vitesse $\vec{v_0}$ suivant X′X, dans une enceinte où l'on a fait le vide.

Elle traverse le champ électrique uniforme créé entre deux plateaux horizontaux d'un condensateur plan. Soit d la distance entre ces plateaux et U la différence de potentiel continue appliquée aux bornes.

a) Ecrire l'équation de la trajectoire de cette particule entre les plateaux du condensateur, de longueur L.

b) Que devient la trajectoire du corpuscule à la sortie du condensateur?

Calculer l'ordonnée $y = O'P$ du point d'impact P sur un écran vertical situé à une distance D du centre, O, du condensateur plan, O′ étant l'intersection de l'axe X′X avec l'écran.

Dans ce qui suit, on considérera que la masse du neutron est sensiblement égale à celle du proton, soit $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg.

On rappelle aussi que la charge du proton est $q = +1{,}60 \times 10^{-19}$ C et que le nombre d'Avogadro est $N = 6{,}02 \times 10^{+23}$.

L'unité de masse atomique (u.m.a.) est le quotient de la masse 1 g par le nombre d'Avogadro.

❶ On dispose une substance radioactive qui émet des particules α, au fond d'un canal rectiligne, d'axe horizontal, percé dans un bloc de plomb. Celui-ci est placé dans une enceinte où l'on a fait le vide.

On fait agir, sur le rayonnement émis, le champ électrique précédent, l'écran étant ici remplacé par une plaque photographique. On observe sur celle-ci une tache A.

Montrer que la mesure de la déviation y de la tache A permet de déterminer la vitesse d'éjection de ces particules α; on prendra ici, pour la masse de cette particule, 4 u.m.a.

Application numérique : $U = 20\,000$ V; $L = 10$ cm; $d = 5$ cm; $D = 50$ cm; $y = 3{,}75$ mm.

❷ La substance radioactive est un isotope du polonium, qui se désintègre suivant la réaction

$$^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{206}_{82}\text{Pb}.$$

a) Donner la signification de cette réaction.

b) Faire le bilan en masses de cette réaction, sachant que le polonium 210 a une masse de 210,048 21 u.m.a., le plomb 206 une masse de 206,03853 u.m.a. et la particule α une masse de 4,00387 u.m.a. Conclusion de ce bilan.

❸ Soit n_0 le nombre de particules de polonium 210 présentes à l'instant initial; le nombre n de ces particules présentes à l'instant t est donné par la relation

$$n = n_0 e^{-0.005\,t} \ (t \text{ étant exprimé en jours}).$$

Quelle est la demi-vie radioactive, ou période, T de cette désintégration (temps au bout duquel la moitié des particules présentes initialement s'est désintégrée)? Quelle est la fraction des particules restantes aux temps 2T, 3T? Construire le graphe donnant les variations de n en fonction de t.

(Bac.)

Contrôle n° 6.

❶ Le radium, au cours de sa désintégration spontanée, émet des particules α (noyaux d'hélium) dont on peut déterminer le nombre émis pendant un temps donné. On peut recueillir l'hélium dégagé. Or, on a mesuré, dans les conditions normales, 0,578 mm³ d'hélium, en 587 jours, et on a dénombré dans le même temps $1{,}648 \times 10^{16}$ particules α. En déduire une valeur approchée du nombre d'Avogadro N.

❷ Les particules α émises dans le vide et chargées d'électricité positive sont reçues sur une armature d'un condensateur dont la capacité est 10^{-5} μF, l'autre armature étant au sol. Au bout de 30 s, la différence de potentiel entre les armatures est 312 V.

a) Quelle est la charge prise par le condensateur en 1 s?

b) Combien de particules atteignent l'armature en 1 s;

c) Quelles est la charge d'une particule α? Combien de charges élémentaires contient-elle?

On rappelle que l'hélium est monoatomique et que le volume d'une mole gazeuse dans les conditions normales est 22 400 cm³. La charge élémentaire d'électricité est $1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

(Bac.)

Contrôles portant sur l'ensemble du programme

Contrôle n° 1.

❶ Un skieur part sans vitesse initiale d'un point A et descend une pente régulière AB de 10 %, longue de 200 m. Quelle serait sa vitesse v en B si tous les frottements étaient négligeables? ($g = 10$ m/s².)

❷ Animé de cette vitesse v, le skieur aborde une montée régulière BC de 5 %. En supposant encore les frottements négligeables, quelle distance pourrait-il parcourir sur cette montée en profitant simplement de la vitesse qu'il possédait en B? Quelle serait la durée de cette montée?

❸ Ecrire l'équation qui permet de calculer le temps t, compté à partir du passage en B, au bout duquel le skieur, dans les mêmes conditions, aurait parcouru une distance e sur BC. Discuter cette équation. Application numérique : $e = 144$ m.

❹ Les frottements n'étant pas négligeables, le skieur parti de A possède en réalité, en arrivant en B, une vitesse de 16 m/s. Calculer l'énergie qui a été absorbée par les divers frottements au cours de la descente. (Poids total du skieur : 800 N.)

❺ Pour remonter BA, le skieur s'attache par un câble à un remonte-pente. Son mouvement, d'abord uniformément accéléré avec une accélération $\gamma = 0{,}5$ m/s², devient rapidement uniforme. Calculer la traction exercée par le câble sur le skieur pendant les deux phases de la montée. Pendant la deuxième phase, cette traction dépend-elle de la vitesse? *(Bac C.E.)*

Contrôle n° 2. Dans ce problème on considère un attelage formé d'une automobile de masse 1 200 kg et d'une caravane de masse 800 kg.

A. L'ensemble, partant du repos, effectue sur une route rectiligne et horizontale un démarrage dans lequel on suppose que la force motrice reste constante et égale à 1 000 N. Les forces dues aux divers frottements et qui s'opposent au mouvement sont ici considérées comme négligeables.

❶ Quelle vitesse le convoi atteint-il 9 secondes après son départ?

❷ Quel est alors l'espace parcouru depuis le départ?

❸ Quel effort tractif l'automobile exerce-t-elle sur le crochet d'attelage de la caravane?

B. L'attelage, partant à nouveau du repos, sur la même voie rectiligne et horizontale, est supposé effectuer maintenant un démarrage à puissance constante égale à 9 kW. Là encore, on considère comme négligeable le travail des forces dues aux diverses causes de frottement.

❶ En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, dont l'emploi sera clairement justifié, et en choisissant l'instant de départ comme instant origine, établir l'expression, $v = f(t)$, de la vitesse du convoi en fonction du temps et donner la valeur de cette vitesse 9 secondes après le départ.

❷ A partir de l'expression $v = f(t)$ précédente, établir celle, $x = \mathrm{F}(t)$, donnant l'espace parcouru par le convoi en fonction du temps et calculer cet espace 9 secondes après le démarrage.

❸ Etablir, de même, à partir de l'équation $v = f(t)$, l'expression $\gamma = f'(t)$, donnant l'accélération des véhicules en fonction du temps et calculer l'effort tractif s'exerçant sur le crochet de la remorque 9 secondes après le départ.

C. Dans cette question, voiture et caravane se déplacent à vitesse de croisière constante égale à 75 km/h, sur une route rectiligne et horizontale.

Les diverses causes s'opposant au mouvement du convoi ne peuvent plus être négligées et l'on admet que l'intensité de ces résistances passives se répartit à raison de $\frac{1}{3}$ pour la voiture et $\frac{2}{3}$ pour la caravane. Dans ces conditions, le moteur développe une puissance utile de 20 kW.

Déterminer l'intensité de la force qui équivaut à l'action du moteur et en déduire l'effort tractif s'exerçant sur le crochet d'attelage de la caravane.

D. L'attelage aborde, enfin, un virage non relevé, de rayon R = 150 m, à la vitesse de 75 km/h. L'adhérence du convoi à la route autorise la résultante des diverses réactions exercées par le sol sur l'attelage à prendre une inclinaison pouvant atteindre 30° par rapport à la verticale.
Les véhicules peuvent-ils aborder le virage sans risque de dérapage? La réponse devra être, évidemment, justifiée.

N.B. — Les quatre parties du problème sont indépendantes. Les réponses concernant des vitesses seront exprimées en kilomètre/heure $g = 9{,}8$ m/s². *(Bac. C.E.)*

Contrôle n° 3. On prendra $g = 9{,}8$ SI et l'on négligera la résistance de l'air, sauf dans la question ❶, *b*).

❶ Une bille A, considérée comme ponctuelle, de masse $m = 100$ g, est suspendue à un fil inextensible, de masse négligeable et de longueur 1 m.
On écarte ce pendule d'un angle α_M de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale.

a) Calculer la vitesse de la bille et la tension du fil lorsque le pendule passe par la position d'équilibre pour la première fois, l'amplitude initiale étant $\alpha_M = 60°$.

b) Après 25 oscillations, le pendule passe par la position d'équilibre, avec une vitesse réduite de moitié du fait des frottements de l'air.
Calculer l'énergie totale perdue.

❷ D'un point situé à 20 m au-dessus du sol, la bille est lancée vers le haut à la vitesse de 20 m/s et sous un angle faisant avec l'horizontale 60°.

a) Quelle est au début du mouvement son énergie mécanique totale?

b) Quelle sera son énergie cinétique quand elle sera à 15 m au-dessus du sol?

c) Quelle sera alors sa vitesse?

❸ On lance la bille horizontalement d'un point situé à 2 m du sol, à la vitesse de 3 m/s.

a) Ecrire l'équation de la trajectoire de la bille.

b) Dire au bout de combien de temps la bille arrive au sol.

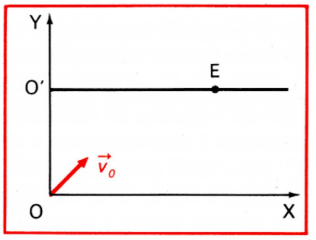
c) Déterminer la grandeur et la direction de la vitesse de la bille à l'instant où elle heurte le sol. *(Bac. D.)*

Contrôle n° 4. Dans tout le problème, les trajectoires sont dans le plan vertical XOY, on néglige la résistance de l'air et l'on prend $g = 9{,}80$ m/s².
On rappelle que, dans la transformation de l'énergie mécanique en travail, une calorie est équivalente à 4,19 J.

A. Un canon, placé en O, dont le tube est incliné à 45° vers le haut, lance un projectile avec une vitesse initiale v_0.

❶ Ecrire l'équation de la trajectoire dans le repère orthonormé XOY.

❷ La durée de trajet du projectile est réglée pour que l'éclatement se fasse au point E, à 6 000 m d'altitude et 11 s après le départ du coup.
Calculer la vitesse initiale, v_0, et la distance horizontale O'E.



❸ L'incertitude absolue sur la vitesse initiale est 1 m/s; l'incertitude sur l'inclinaison du tube est ici négligeable; calculer l'incertitude absolue autorisée sur la durée du trajet, sachant que le point d'éclatement peut varier, en distance horizontale, de 50 m de part et d'autre du point E.

❹ Quelle est la vitesse du projectile au point E?

B. La masse reculante du canon est 1 200 kg, la masse du projectile est 18 kg, son diamètre 105 mm; la vitesse initiale du projectile à la sortie du tube du canon est maintenant 900 m/s. On supposera, pour simplifier que le système est isolé. La pression exercée dans le tube, sur le projectile est supposée constante et égale à $6{,}24 \cdot 10^7$ Pa. On néglige tous les frottements.

❶ Calculer la durée du trajet dans le tube (on négligera, dans cette question, le poids du projectile devant la force pressante exercée par les gaz).

❷ Calculer la quantité de mouvement.

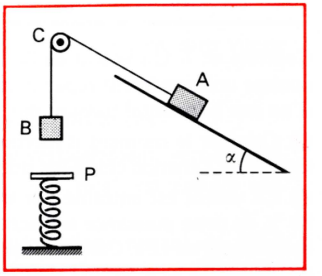
❸ Quelles sont la vitesse et l'énergie cinétique de la masse reculante?

❹ En supposant que cette énergie cinétique est absorbée par un frein de recul, quelle est, en calories, la quantité de chaleur dégagée dans le frein au départ d'un coup?

(Bac. C.E.)

Contrôle n° 5. On considère un corps A de masse M = 800 g qui peut glisser suivant une ligne de plus grande pente d'un plan incliné, d'un angle $\alpha = 30^\circ$ sur le plan horizontal. Le corps A est relié à un corps B de masse M′ = 500 g par un fil inextensible, de masse négligeable, passant sur une poulie C de rayon ρ, de masse $m = 100$ g que l'on supposera répartie sur sa périphérie.

Le système (A, B, C) est abandonné sans vitesse. On admettra que tous les frottements sont négligeables et que le fil reliant A à B ne glisse pas sur la gorge de la poulie.



❶ *a*) Exprimer littéralement l'énergie cinétique du système (A, B, C) en fonction de la vitesse V des corps A et B.
b) Etablir la nature du mouvement des corps A et B en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.
c) Calculer numériquement la longueur l du déplacement des corps A et B, à partir de leur position de repos, quand leur vitesse a atteint la valeur $V = 1$ m.s^{-1}.
On donne $g = 9{,}80$ m.s^{-2}.

❷ A l'instant où les corps A et B ont atteint la vitesse $V = 1$ m.s^{-1}, le corps B entre en contact avec un plateau P de masse $\mu = 100$ g, (supporté par un ressort parfaitement élastique, d'axe vertical, de masse négligeable, de raideur constante $k = 400$ N/m) et, simultanément, le fil reliant B à A est coupé. On admettra que le choc est mou, c'est-à-dire que le corps B et le plateau P restent solidaires et prennent aussitôt après le choc la même vitesse v.
a) Calculer v.
b) Calculer, par des considérations énergétiques, le raccourcissement maximal, d, du ressort après le choc. On pourra introduire la quantité d_0, raccourcissement du ressort provoqué par le poids du plateau P seul.

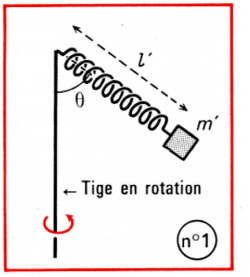
❸ On se propose d'étudier le mouvement ultérieur du système formé par le plateau P et le corps B qui resteront toujours solidaires.
a) Quel est le raccourcissement d' du ressort quand le système passe par sa position d'équilibre?
b) Montrer que le système effectue des oscillations verticales sinusoïdales.
c) Calculer l'amplitude a et la période T de ces oscillations.
N.B. — Dans les questions 2° et 3°, les raccourcissements d et d' seront comptés à partir de la longueur à vide du ressort. *(Bac. C.E.)*

Contrôle n° 6.

❶ Un ressort à spires non jointives, dont la masse est négligeable, a pour longueur $l_0 = 15$ cm. Quand on y suspend une masse $m = 100$ g sa longueur devient égale à $l = 25$ cm.

Donner la valeur du coefficient de raideur du ressort $\left(\dfrac{\text{charge}}{\text{allongement}}\right)$.

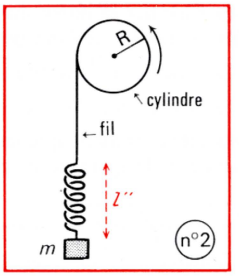
❷ On suspend à l'extrémité inférieure du ressort une masse $m' = 20$ g. On accroche le ressort à l'extrémité supérieure d'une tige verticale qui, en tournant autour de son axe, entraîne le ressort et la masse d'un mouvement de rotation uniforme (fig. 1).
Au cours de ce mouvement le ressort a pour longueur $l' = 19$ cm.



a) Quelle est la tension du ressort ?

b) Quel est l'angle constant θ que fait l'axe du ressort avec la tige ?

c) Quelle est, en tours par seconde, la vitesse de rotation de la tige ?



❸ A ce même ressort de masse négligeable on suspend à nouveau la masse $m = 100$ g. On accroche l'extrémité supérieure du ressort à un fil qui s'enroule sur un cylindre d'axe horizontal et dont l'extrémité est fixée sur le cylindre. Le cylindre peut tourner autour de son axe de révolution qui est horizontal (fig. 2).

a) Le système étant abandonné à lui-même, quelle est l'accélération du mouvement de la masse *m*, sachant qu'au cours de ce mouvement le ressort a pour longueur $l'' = 20$ cm ?

b) Quel est le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe, sachant que le rayon de ce cylindre est $R = 5$ cm ? On prendra $g = 9{,}8$ m/s² *(Bac. C.E.)*

Contrôle n° 7. Un volant de 80 cm de diamètre a une masse de 300 kg qui peut être considérée comme uniformément répartie sur sa circonférence. Il peut tourner dans un plan vertical autour d'un axe horizontal passant par son centre O.

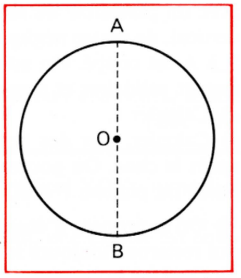
❶ Calculer le moment d'inertie du volant par rapport à l'axe de rotation.
Quelle est l'énergie cinétique du volant lorsque sa vitesse de rotation est 90 tr/mn ?

❷ Ce volant est entraîné par un moteur électrique de puissance, P, constante. On admet que 80 % de cette puissance suffisent pour communiquer au volant, initialement au repos, sa vitesse de 90 tr/mn en 12 s. Calculer, dans ces conditions, la valeur de P.

❸ On coupe le moteur et l'on exerce sur le volant un couple résistant constant qui ramène, après 25 tours, sa vitesse de rotation de 90 tr/mn à 30 tr/mn.

a) Calculer la valeur du moment du couple de freinage.

b) Le volant tournant à raison de 30 tr/mn, on supprime le freinag.e Quelle est alors la nature du mouvement pris par le volant si l'on néglige les frottements ? Quelle est son équation horaire ? Calculer la vitesse linéaire de chaque point de la circonférence.



❹ A la suite d'une rupture, un fragment de métal supposé ponctuel, se détache du volant à l'instant où il passe par la verticale de l'axe et en dessous (point B) à 40 cm de l'axe.
En quel point du sol ira-t-il tomber, si l'axe de rotation du volant se trouve à 0,60 m du sol ? On prendra $g = 9{,}8$ m/s².
(Bac. C.E.)

Contrôle n° 8. On dispose d'un disque homogène de masse $M = 0{,}4$ kg et de rayon $R = 0{,}2$ m.

❶ Le disque partant du repos roule sans glisser le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné à 30° sur l'horizontale. Calculer :
— l'accélération linéaire de son centre de gravité ;
— l'accélération angulaire d'un de ses rayons ;
— son énergie cinétique après un parcours, $l = 2$ m.
On rappelle que le moment d'inertie d'un disque homogène par rapport à son axe est

$$J = \frac{1}{2} MR^2.$$

❷ Le plan du disque étant horizontal, on le suspend par son centre de gravité à un fil de torsion vertical. Il constitue ainsi un pendule de torsion. On le fait tourner d'un angle $\theta_m = 1$ radian à partir de sa position de repos et on l'abandonne à lui-même au temps $t = 0$.

a) Ecrire l'équation du mouvement.

b) Calculer la constante de torsion C du fil sachant que la période d'oscillation est $T = 3$ s.

c) Calculer l'énergie potentielle élastique du système lorsque le disque est à son élongation maximale.

❸ Le disque est placé dans un plan vertical et peut tourner sans frottement autour de son axe. En un point de sa périphérie, on place une surcharge ponctuelle $m = 0{,}1$ kg. On obtient ainsi un pendule pesant, dont on calculera la période des petites oscillations.
Que devient cette période si l'on incline le plan du disque d'un angle $\alpha = 30^{\circ}$ par rapport au plan vertical ?
Dans tout le problème, on prendra $g = 9{,}80$ m/s².
N.B. — Les trois questions du problème sont indépendantes.

(Bac. C.E.)

Contrôle n° 9.

❶ Un pendule, constitué d'une bille métallique de masse égale à 20 g et de dimensions négligeables, suspendue à un fil de 0,8 m de long, effectue des oscillations de faible amplitude, en un lieu où l'intensité de pesanteur est égale à 9,8 unités SI.
Calculer sa période.

❷ Ce pendule, écarté de sa position d'équilibre d'un angle de 45°, est abandonné sans vitesse initiale. Calculer la vitesse de la bille :
a) lorsque le pendule a une élongation angulaire de 30° ;
b) lorsque le pendule passe par la verticale. Quelle est la tension du fil dans ce cas ?

❸ Le pendule est placé dans la cage d'un ascenseur qui se déplace verticalement, vers le haut. Son mouvement, d'abord uniformément accéléré, d'accélération $\overline{\gamma_1} = 1$ m/s², est ensuite uniforme, puis uniformément retardé, d'accélération $\overline{\gamma_2} = -1{,}5$ m/s².
On demande de calculer la valeur de la période du pendule, les oscillations restant de faible amplitude, au cours de chacune des phases du mouvement. *(Bac. D.)*

Contrôle n° 10.

❶ Aux extrémités A et B d'une tige rigide de longueur l, de masse négligeable, mobile autour d'un axe horizontal, O, équidistant de A et de B et perpendiculaire à la tige sont fixées deux masses ponctuelles : m_1 en A, $m_2 = 3m_1$ en B.
Données numériques :

$$m_1 = 6 \text{ g}, \qquad l = 8 \text{ cm à } 0\ ^{\circ}\text{C}, \qquad g = 9{,}81 \text{ m.s}^{-2}.$$

a) Calculer le moment d'inertie du système par rapport à l'axe de rotation, à 0 °C.
b) Quelle est, à 0 °C, la période des petites oscillations du système autour de l'axe O ?
c) La température passe de 0 °C à 20 °C. Quelle est la variation relative de période, sachant que le coefficient de dilatation linéaire, λ, de la tige est égal à $1{,}4 \times 10^{-5}$?
De combien le nombre des oscillations accomplies par le système en 24 heures varie-t-il, en plus ou en moins ?

❷ L'axe horizontal passe maintenant par le centre de gravité. A l'aide d'un moteur électrique, on communique au système une vitesse de rotation de 720 tr/mn.
a) Quelle est la valeur du moment du couple de freinage, supposé constant, qu'il faut appliquer pour que le système s'arrête au bout de 50 tours, le moteur étant débranché ?
b) Quel est le temps au bout duquel la valeur de la vitesse de rotation deviendra la moitié de celle de la vitesse initiale ? *(Bac. C.E.)*

Contrôle n° 11. Une tige rectiligne, de masse négligeable, de longueur 80 cm, peut tourner librement autour d'un axe horizontal, perpendiculaire à la tige en son milieu, O. Dans tout le problème, on négligera les frottements et la résistance de l'air.
On prendra : accélération de la pesanteur $g = 9{,}80$ m/s².
A. Une masse ponctuelle A est fixée à l'une des extrémités de la tige, à 40 cm de O. Le pendule simple ainsi constitué est écarté de sa position d'équilibre d'un angle infiniment petit ($\alpha = 0{,}1$ radian). A l'instant $t = 0$, on l'abandonne sans vitesse initiale.

❶ Quelle est, en fonction du temps, l'expression de l'élongation, θ ?

❷ Quelle est l'expression de sa période ?

B. La masse A, de valeur $m = 10$ g, est toujours à 40 cm de O. La tige, dans une position horizontale, est abandonnée sans vitesse initiale.

❶ Quelle est la vitesse, v, de A quand elle passe par la verticale ? Quelles sont, à cet instant, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique de A ?

❷ En arrivant à la verticale, A heurte un point matériel B, de masse x, au repos. On suppose que ce choc est parfaitement élastique. Dans ce cas, il y a à la fois conservation de la quantité de mouvement et conservation de l'énergie cinétique au cours du choc. Déterminer, en fonction de v, de m et de x (valeurs littérales), les vitesses respectives, v'_A et v'_B, de A et de B immédiatement après le choc. Discuter.

Applications numériques : Calculer v'_A et v'_B, d'abord pour $x = 5$ g, puis pour $x = 10$ g et enfin pour $x = 15$ g.

C. La masse A est toujours à 40 cm de O. Une masse ponctuelle C, de valeur $m = 10$ g, identique à A, est placée à 20 cm de O, sur l'autre moitié de la tige.

❶ Calculer la période des petites oscillations du pendule pesant ainsi réalisé.

❷ La tige, dans une position horizontale, est abandonnée sans vitesse initiale. Calculer la vitesse angulaire du pendule quand il passe par sa position d'équilibre.

N.B. — Les trois parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque. *(Bac. C.E.)*

Contrôle n° 12.

❶ Un disque blanc D, circulaire et homogène, d'axe $x'Ox$, a comme rayon $r = 10$ cm et pèse 100 g. On le fait osciller autour d'un axe Δ, perpendiculaire à son plan, passant par un point de sa circonférence.

a) L'amplitude des oscillations étant faible et les frottements négligeables, calculer la période d'oscillation du disque en un lieu où $g = 9{,}80$ m/s². (On rappelle que le moment d'inertie d'un disque circulaire et homogène par rapport à son axe est $J_{x'ox} = \frac{1}{2} mr^2$.)

b) Quelle est la longueur du pendule simple synchrone de ce pendule pesant ?

❷ Le disque D, entraîné par un moteur électrique, effectue maintenant autour de son axe $x'Ox$ un mouvement de rotation uniforme. Pour déterminer sa vitesse de rotation, on éclaire le disque D par un faisceau lumineux que démasquent successivement les 10 trous d'un disque D′, régulièrement répartis sur une circonférence, qui tourne avec une vitesse réglable et connue à tout instant. On constate alors que la plus grande vitesse de D′, pour laquelle un secteur noir dessiné sur D paraît unique et immobile, est 10 tours par seconde (on suppose que D′ tourne dans le même sens que D).

a) Quelle est la vitesse de rotation du disque D (exprimée en radians par seconde) ?

b) Quel est l'aspect du disque D lorsque D′ tourne à raison de 5, puis 20, puis 9,5 tr/s ?

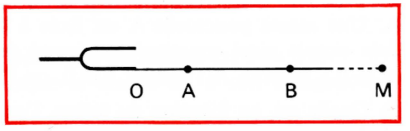
❸ Le disque D étant lancé à la vitesse de rotation calculée précédemment, on coupe le courant de son moteur ; puis sous l'influence d'un couple de freinage supposé constant, il s'arrête au bout de 10 secondes.

a) Calculer le moment de ce couple de freinage.

b) Calculer le nombre de tours effectués par le disque D pendant ces 10 secondes. *(Bac. D.)*

Contrôle n° 13. On dispose d'un diapason entretenu électriquement dont les branches sont animées d'un mouvement sinusoïdal. Sa fréquence de vibration est 200 Hz. L'amplitude à l'extrémité des branches est 2 mm.

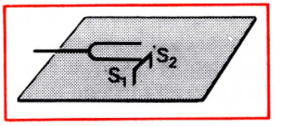
❶ A une branche du diapason vibrant verticalement, on fixe, comme l'indique la figure ci-contre, l'extrémité O d'une corde élastique tendue horizontalement et dont l'autre extrémité M est placée de telle façon que l'on peut négliger la réflexion des ondes.



a) Ecrire l'équation du mouvement sinusoïdal de la source O, en précisant l'origine des temps, celle des abscisses et le sens de déplacement de O à l'instant origine.
b) Ecrire l'équation du mouvement d'un point A de la corde, situé à 15 cm de O, et celle d'un point situé à 45 cm de O; déterminer la différence de phase des mouvements de B et de A; comparer les mouvements de ces deux points. (Vitesse de propagation des ondes le long de la corde : 40 m/s.)

❷ Que se passe-t-il si la réflexion en M est celle qui se produit sur un obstacle fixe sans perte d'énergie pour le mouvement vibratoire? A quelle distance minimale de O, au-delà de B, le point M doit-il se trouver pour que le phénomène soit très net? Qu'observera-t-on? Se limiter à une description du phénomène, en admettant qu'on peut considérer le point O comme un nœud de vibrations.

❸ A une branche du diapason on fixe, comme l'indique la figure précédente, une tige supportant deux pointes distantes de 1,4 cm et produisant, en deux points de la surface d'un liquide, deux perturbations en phase de même amplitude. (Soit S_1 et S_2 ces deux points, l'amplitude commune est 2 mm.) Décrire et expliquer le phénomène observé.



Déterminer l'état vibratoire d'un point situé à 18 mm de S_1 et à 9 mm de S_2.
Vitesse de propagation des ondes à la surface du liquide : 120 cm/s.
N.B. — Dans tout le problème, on supposera l'amortissement des ondes négligeable lors de la propagation. *(Bac. D.)*

Contrôle n° 14.
A. Une fourchette frappe périodiquement la surface libre d'une nappe d'eau, déterminant des vibrations sinusoïdales d'amplitude $a = 1$ mm (on négligera l'amortissement ainsi que toute réflexion), de fréquence $N = 500$ Hz. Les deux pointes, S_1 et S_2, sont distantes de $d = 2$ cm. La célérité des ondes transversales sur l'eau est $V = 0{,}4$ m/s. La coupe, C, de la surface de l'eau est examinée à travers une paroi plane, P, verticale, parallèle au segment S_1S_2, située à $D = 20$ cm de S_1S_2. On repère un point M de C par son abscisse x, comptée à partir de O, projection du milieu de S_1S_2 sur P.

❶ Compte tenu du fait que d et x sont très inférieurs à D montrer que :

$$S_2M + S_1M = 2D \text{ et } S_2M - S_1M = \frac{dx}{D}.$$

❷ Déterminer les points de C où l'amplitude est maximale, dans l'intervalle : $|x| \leqslant 12$ mm. Sur quelles courbes de la figure d'interférences se dessinant sur la surface de l'eau se placent ces points?

❸ Ecrire l'équation cartésienne de C dans le repère Ox, Oy. Oy est vertical. Quel est l'aspect de la coupe de l'eau à un instant donné? Comment se déforme-t-elle au cours du temps?
B. Une source lumineuse, S, ponctuelle, émet une radiation de longueur d'onde $\lambda = 0{,}8\,\mu$. Elle éclaire deux trous S_1 et S_2, pratiqués dans un écran E; S est équidistant de S_1 et S_2, $S_1S_2 = a = 1$ mm. On observe les interférences sur un écran E′, parallèle à E, à $D = 1$ m de E.

❶ Déterminer l'interfrange.

❷ Soit O la projection du milieu de S_1S_2 sur E′. On considère un point M de E′, à la distance x de O, OM est parallèle à S_1S_2. Soit a l'amplitude de la vibration lumineuse en S_1 (ou S_2). Déterminer l'amplitude, A, de la vibration lumineuse en M.

❸ L'intensité lumineuse I est proportionnelle au carré de l'amplitude. Soit I_0 l'intensité lumineuse sur l'axe d'une frange brillante. Exprimer I en fonction de x. Représenter graphiquement cette fonction.

Contrôle n° 15. On dispose d'un condensateur, dont la capacité est 20 μF, d'une bobine, ayant une résistance de 10 Ω et un coefficient d'inductance de 0,3 H, et d'une différence de potentiel sinusoïdale dont la valeur efficace est 100 V et dont on peut faire varier la fréquence.

❶ La fréquence étant 50 Hz, calculer la valeur efficace et la phase du courant obtenu en appliquant la différence de potentiel successivement aux appareils suivants :
a) Aux bornes du condensateur;
b) Aux bornes de la bobine.
Faire dans les deux cas la construction de Fresnel.

❷ Que deviennent l'intensité efficace et la phase du courant si l'on branche ces deux appareils en série sous la même différence de potentiel que précédemment, la fréquence étant toujours de 50 Hz? Quelle est la valeur efficace de la différence de potentiel aux bornes de chaque appareil? Faire la construction de Fresnel.

❸ Calculer la puissance moyenne dissipée dans le circuit quand la fréquence est 50 Hz. Quelle devrait être la capacité du condensateur pour que le facteur de puissance soit égal à l'unité?

❹ Toujours avec le montage de la question ❷, étudier comment varient l'intensité efficace du courant, I, et la phase φ lorsqu'on fait varier la fréquence N sans changer la valeur de la différence de potentiel appliquée aux bornes de l'ensemble; on tracera les courbes représentant les variations de I et φ en fonction de N. *(Bac. C.E.)*

Contrôle n° 16.

❶ Pour déterminer la vitesse de rotation d'un moteur électrique, on place, sur l'arbre de celui-ci, un disque noir sur lequel on a dessiné un étroit secteur blanc. Le plan de ce disque est normal à l'axe du moteur.
On éclaire ce dispositif avec une lampe qui donne 125 éclairs par seconde.
Le moteur étant d'abord à l'arrêt, on augmente progressivement sa vitesse de rotation. Lorsque celle-ci atteint la valeur de N tr/s, le secteur blanc du disque paraît immobile pour la première fois. Quelle est la valeur de N?

❷ La vitesse de rotation étant N tr/s (précédemment calculée), on coupe l'alimentation du momoteur; celui-ci s'arrête au bout de 2 mn 30 s.
a) Calculer le moment du couple, que l'on supposera constant, qui provoque l'arrêt.
b) Calculer le nombre de tours effectués par le moteur avant son arrêt complet.
On donne le moment d'inertie, J, de la partie tournante par rapport à l'axe de rotation :

$$J = 4{,}5.10^{-2}\ \text{kg.m}^2.$$

❸ On place ce moteur, maintenant calé et équivalant par conséquent à une résistance inductive, dans un circuit alimenté par une source de tension $u = 141 \sin 314\,t$ V. Le facteur de puissance du circuit est alors $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et l'intensité efficace du courant est I_1.

Pour augmenter le facteur de puissance du circuit précédent, l'intensité du courant restant en retard de phase sur la tension, on place en série avec le moteur un condensateur de capacité $C = 232\ \mu F$ et une résistance non inductive $r = 12\ \Omega$. Le facteur de puissance est alors 0,99 et l'intensité efficace du courant est I_2.
Calculer l'inductance, L, du moteur et sa résistance interne, R.
Calculer les valeurs des intensités efficaces I_1 et I_2.
N. B. — La question ❸ est indépendante des deux premières.

(Bac. C.E.)

Contrôle n° 17.

❶ Une différence de potentiel sinusoïdale de fréquence 50 Hz et de valeur efficace 110 V est appliquée aux deux extrémités d'une portion de circuit comprenant en série : une résistance pure $R = 30\ \Omega$, une bobine de résistance négligeable et d'inductance $L = 0{,}23$ H et un condensateur de capacité $C_0 = 100\ \mu F$. Déterminer, en utilisant la construction de Fresnel, l'intensité efficace du courant et les valeurs efficaces des tensions aux bornes de ces trois appareils.
On prendra dans tout le problème $\pi^2 = 10$; on rappelle d'autre part que les données numériques ne sont jamais parfaitement connues.

❷ Le condensateur gardant la capacité précédente, pour quelle valeur L_0 de l'inductance la valeur maximale de l'intensité serait-elle atteinte ?

Si l'on prenait les valeurs $L_1 = \frac{L_0}{K}$ et $C_1 = \frac{C_0}{K}$ pour l'inductance et la capacité, que deviendrait la fréquence du courant correspondant à la résonance ? Calculer cette fréquence f_1 pour $K = 10\,000$.

❸ Avec ces nouvelles valeurs, L_1 et C_1, on constitue un circuit de résistance totale $0{,}1\,\Omega$. Il est le siège d'un courant induit quand il est atteint par une onde électromagnétique. Calculer sa longueur d'onde λ_1 pour que l'intensité du courant soit maximale. Soit I_1 la valeur efficace de cette intensité ; pour quelles valeurs λ_2 et λ_3 de la longueur d'onde, ce courant sera-t-il réduit à $\frac{I_1}{100}$ (la f.é.m. induite gardant la même valeur efficace) ?

❹ *a*) Quelle longueur minimale une antenne, mise à la terre, par une de ses extrémités A, isolée à l'autre extrémité B, doit-elle avoir pour émettre la première longueur d'onde λ_1 calculée à la question ❸ ?

On rappelle que le potentiel du sol est égal conventionnellement à 0.

b) Deux antennes émettrices, A′B′ et A″B″, verticales, identiques à AB, synchrones et cohérentes, sont distantes de *d*. On étudie l'onde électromagnétique en un point M situé très loin de ces deux antennes par rapport à la longueur d'onde et à l'intersection du plan A′B′A″B″ et d'un plan horizontal. Le point M n'étant pas situé entre les deux antennes, pour quelles distances *d* aura-t-on un maximum ou un minimum de l'amplitude de l'onde électromagnétique ?

(Bac. C.E.)

Contrôle n° 18.

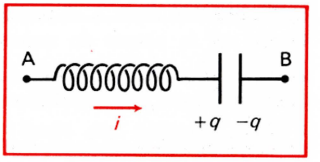
❶ On dispose en série entre les points A et B *(voir figure)* une bobine de résistance R et d'inductance L et un condensateur de capacité C. Cette portion de circuit est soumise à une différence de potentiel sinusoïdale : $u = U_m \cos \omega t$ de fréquence 50 Hz et de valeur efficace égale à 100 V.

a) Calculer numériquement la tension maximale U_m et la pulsation ω.

b) On désigne par *i* la valeur algébrique instantanée du courant et par *q* la charge algébrique instantanée portée par une armature du condensateur *(voir figure)*. Quelle relation y a-t-il entre *i* et *q* ? *(Respecter les conventions de signes indiquées sur la figure.)*

Exprimer la différence de potentiel *u* entre les points A et B en fonction de R, de L, de C, de *i*, de sa dérivée par rapport au temps et de *q*, puis en fonction de R, de L, de C, de *q*, et de ses dérivées première et seconde.

❷ On admet qu'en régime permanent, l'intensité *i* est de la forme : $i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$. Donner l'expression de l'impédance Z de la portion de circuit. Calculer numériquement Z, I_m, l'intensité efficace et tg φ avec les données numériques suivantes : $R = 100\ \Omega$, $L = 0{,}5$ H, $C = 10\ \mu$F. Calculer L pour qu'il y ait résonance.



❸ Une masse *m* est suspendue à l'extrémité libre d'un ressort d'axe vertical et de raideur *k*. (On appelle raideur d'un ressort le facteur par lequel il faut multiplier l'allongement pour obtenir la tension du ressort.) La masse *m* est soumise à une force de direction verticale et d'intensité *f*, comptée positivement vers le bas, et sinusoïdale : $f = F_m \cos \omega t$. Elle est de plus soumise à une force de frottement de module proportionnel au module de la vitesse : $\vec{f'} = -\mu \vec{v}$. La masse *m* ne peut qu'osciller verticalement et on désignera par *x* la valeur algébrique de son déplacement vers le bas à partir de sa position d'équilibre.

a) Exprimer la force appliquée instantanée *f* en fonction de *m*, de μ, de *k*, de *x* et de ses dérivées première et seconde par rapport au temps, puis en fonction de *m*, de μ, de *k*, de *v*, de sa dérivée et de sa primitive.

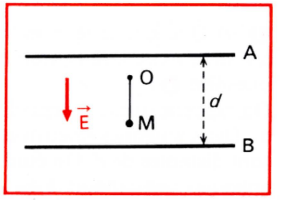
b) On constate que la masse *m* est soumise des oscillations forcées de pulsation ω, sa vitesse étant de la forme : $v = V_m \cos(\omega t - \varphi)$. Montrer comment on peut déterminer V_m et tg φ par un diagramme de Fresnel.

c) Définir, par analogie avec le problème électrique précédent, une impédance mécanique Z dont on donnera l'expression en fonction de m, de μ, de k, et de ω; que se passe-t-il pour : $m.\omega^2 = k$? Donner dans ce cas particulier l'expression de x et décrire le mouvement. Que se passerait-il s'il n'y avait pas d'amortissement? *(Bac. C.E.)*

Contrôle n° 19.

❶ Une sphère conductrice, M, assimilable à un point matériel, de masse $m = 2$ g, est suspendue en un point fixe, O, par l'intermédiaire d'un fil isolant, inextensible, de masse négligeable et de longueur $l = 10$ cm.
Calculer la période des petites oscillations du pendule simple ainsi constitué ($g = 10$ m/s².)

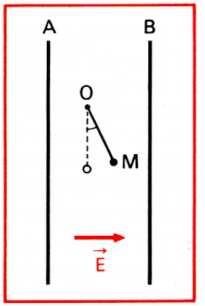
❷ Le pendule (figure ci-contre) est placé entre deux armatures métalliques, A et B, planes et horizontales, de grandes dimensions, distantes entre elles de $d = 20$ cm. Le point de suspension. O, est à 5 cm de l'armature supérieure, A. On applique, entre les deux armatures, une différence de potentiel constante $U = 2\,000$ V, créant alors, entre A et B, un champ électrique uniforme vertical, dirigé de haut en bas, de module $E = \frac{U}{d}$.



La sphère porte une charge électrique $q = +0{,}2.10^{-6}$ C.
Quelle est la nouvelle période des petites oscillations du pendule?
(On rappelle qu'une charge électrique q, placée en un point de l'espace où règne un champ électrique $\vec{E}$, est soumise à une force $f = q\vec{E}$.)

❸ Le pendule est toujours dans le champ $\vec{E}$; la sphère M est toujours chargée. On écarte le pendule, avec une pince isolante, d'un angle de 90° et on l'abandonne sans vitesse initiale.
Quelle est la tension du fil, au passage à la verticale?

❹ Le fil casse au passage à la verticale. Déterminer l'équation et la nature de la trajectoire de M après la rupture du fil.
Quelle est la durée du mouvement, jusqu'au moment où M touche l'armature B?



❺ Les armatures sont maintenant verticales (figure ci-contre).
a) Quel est l'angle que fait le pendule, à sa position d'équilibre, avec la verticale?
On a toujours $U = 2\,000$ V, $d = 20$ cm, $q = 0{,}2.10^{-6}$ C.
b) Le pendule étant à sa position d'équilibre, on coupe le fil.
Quelle est la nature du mouvement (trajectoire et équation horaire), tant que M se trouve dans le champ électrique $\vec{E}$ et avant tout choc avec l'une ou l'autre des armatures A et B? *(Bac. C.E.)*

Contrôle n° 20.

A. Pour déterminer la longueur d'onde d'une radiation lumineuse monochromatique, on réalise des interférences avec le dispositif des fentes d'Young présentant les caractéristiques suivantes : distance des fentes : 1,5 mm; distance des fentes à l'écran d'observation : 3 m.
La distance qui sépare la frange centrale numérotée zéro de la frange brillante numérotée 12 d'un côté ou de l'autre de la frange centrale a pour valeur 14,4 mm. En déduire la valeur, λ, de la longueur d'onde utilisée.

B. Cette lumière éclaire la cathode d'une cellule photo-électrique au césium dont le seuil d'émission est $\lambda = 0{,}66\ \mu$.
a) Calculer l'énergie nécessaire à l'extraction d'un électron de cette cathode. (Vitesse de la lumière : $c = 3.10^8$ m/s.)
b) Calculer la vitesse maximale d'un électron sortant de cette cathode sous l'effet de la lumière précédente.

C. La différence de potentiel entre l'anode et la cathode (qui sont planes et parallèles) est 500 V. Montrer qu'on peut négliger l'énergie cinétique communiquée par un photon à un électron, par rapport à celle communiquée par la d.d.p. et calculer la vitesse d'arrivée d'un électron sur l'anode.
On négligera l'action de la pesanteur sur les électrons dont on considérera que la masse est celle qu'ils ont au repos.
On donne : $e = 1{,}6.10^{-19}$ C; $m = 9.10^{-31}$ kg; constante de Planck : $h = 6{,}6.10^{-34}$ J.s.

Contrôle n° 21.

❶ Pour déterminer la longueur d'onde d'une radiation lumineuse monochromatique, on réalise l'expérience suivante : une source lumineuse ponctuelle (A) éclaire un écran percé de deux trous distants de $a = 1{,}5$ mm et derrière lui, à une distance D = 3 mètres, un second écran parallèle sur lequel on observe un système de franges d'interférences. On mesure 12 interfranges. On trouve $d = 14{,}4$ mm.
Expliquer l'existence de ces franges et calculer la longueur d'onde de la radiation monochromatique utilisée.

❷ On substitue à la source (A) une nouvelle source ponctuelle (B) émettant, en plus du rayonnement précédent une seconde radiation de longueur d'onde 0,72 μ. Qu'observe-t-on ? Les franges brillantes ont-elles même intensité ? Quelle est la distance qui sépare deux maximums d'éclairement ?

❸ La source (B) éclaire une plaque de césium placée dans le vide. Sachant que le travail d'extraction d'un électron du césium est $W_0 = 3.10^{-19}$ J, y a-t-il émission d'électrons ? Calculer la vitesse maximale de sortie d'un électron sous l'action de la lumière émise par la source (B.)

❹ On soumet les électrons issus de la plaque à un champ électrique uniforme crée par une électrode portée à un potentiel U positif par rapport à la plaque de césium. Montrer que l'on peut négliger l'énergie cinétique communiquée par un photon à un électron devant celle communiquée par la d.d.p.
Application numérique : U = 500 V.
On donne : charge de l'électron $e = -1{,}6.10^{-19}$ C;
masse de l'électron $m = 9.10^{-31}$ kg;
constante de Planck $h = 6{,}6.10^{-34}$ u.SI.

(Bac. D.)

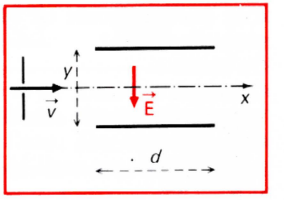
Contrôle n° 22.

A. *Accélération des négatons dans le vide. Rayons* **X**.

❶ On veut obtenir dans un tube électronique une vitesse finale des négatons égale à 30 000 km/s = v.
En admettant que les négatons émis par la cathode aient une vitesse initiale nulle, quelle différence de potentiel doit-on appliquer entre cathode et anode ?

❷ Les négatons animés de cette vitesse frappent une plaque métallique. Quelle est la longueur d'onde minimale des rayons X pouvant se former ?

B. *Déviation des négatons par un champ électrique.*
La plaque métallique étant trouée laisse passer un mince faisceau électronique horizontal. Celui-ci est alors soumis à un champ électrique $\vec{E}$ vertical et uniforme sur une longueur d.



❶ Déterminer l'équation du déplacement vertical y, du faisceau en fonction de l'abscisse horizontale, x, prise à partir de l'entrée du faisceau dans le champ électrique (cf. figure).
Faire un schéma de la trajectoire des négatons dans le champ électrique.

❷ En déduire l'angle de déviation, par rapport à l'horizontale, du faisceau à la sortie du champ.
Application numérique : E = 10 000 V/m; d = 5 cm.

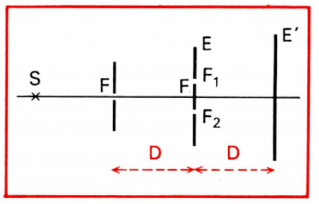
C. *Déviation des négatons por un champ magnétique.*
Le champ électrique précédent est remplacé par un champ magnétique uniforme.

❶ Indiquer, sur un schéma, la direction et le sens du vecteur induction $\vec{B}$ pour que le faisceau, soumis à la force de Laplace, subisse une déviation de même direction et de même sens que précédemment.

❷ Quelle est alors la nature du mouvement des négations dans le champ magnétique? L'intensité de la force électromagnétique étant égale à B.*e.v.*, en déduire l'expression du rayon de courbure de la trajectoire obtenue.
Application numérique : $B = 0{,}34.10^{-3}$ T.

❸ Calculer l'angle de déviation, à la sortie du champ magnétique, celui-ci s'exerçant sur une longueur d = 5 cm.
On donne :
$e = 1{,}6.10^{-19}$ C; masse du négaton $m = 9.10^{-31}$ kg, constante de Planck $h = 6{,}64.10^{-34}$ J.s.
(Bac. C.E.)

Contrôle n° 23. Une source ponctuelle S émet dans l'air une lumière jaune monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0{,}589\ \mu$. Elle éclaire une fente F parallèle à deux fentes, F_1 et F_2, distantes de a = 1 mm, percées dans un écran E. F est dans le plan médiateur de F_1 et F_2 et distant de D = 2 m de leur plan.



A. ❶ Décrire le phénomène observé sur un écran E′ parallèle à E et situé à une distance D = 2 m de E. Calculer :
a) L'interfrange, i;
b) La distance séparant la cinquième frange noire située à droite de la frange centrale de la cinquième frange noire à gauche de cette dernière.

❷ La fente F est déplacée dans un plan parallèle à celui de l'écran de a = 1 mm. On observe sur l'écran E′ une translation du système de franges. En donner la raison.
Préciser la nouvelle position de la frange centrale précédente correspondant à une différence de marche nulle.

B. ❶ Calculer l'énergie d'un photon émis par S.

❷ S est une lampe qui consomme une puissance P = 100 W. Calculer le nombre de photons émis en 1 seconde par S en admettant que seulement 20 % de cette puissance est utilisée pour émettre la lumière jaune précédente.

❸ S est placée à 1 m de la cathode d'une cellule photo-électrique. Le plan de la cathode est perpendiculaire à la direction d'émission. Quel est le nombre de photons reçus en 1 seconde par la cellule? On suppose que S envoie le même nombre de photons dans toutes les directions et que la cathode réceptrice perpendiculaire à la direction d'émission, a une surface, s, de valeur 2 cm².

❹ Si tous ces photons sont des photons *utiles* c'est-à-dire susceptibles de provoquer l'émission d'un électron, quelle est l'intensité du courant électrique passant dans le circuit de la cellule photo-électrique?
On donne :
Constante de Planck : $h = 6{,}62 \times 10^{-34}$ SI.
Vitesse de la lumière dans le vide : c = 300 000 km/s.
Charge de l'électron : $e = -1{,}6 \times 10^{-19}$ coulomb.
Surface d'une sphère de rayon r : $S = 4\pi r^2$.
N.B. — Les parties A et B sont indépendantes. *(Bac. D.)*

Problèmes - Expérience

Ces problèmes exploitent des expériences avec les incertitudes et les défauts qu'elles comportent. Les problèmes d'examen ont en effet une forme trop parfaite, trop polie, pour donner une idée juste des difficultés que rencontre le physicien.

● *Le* Professeur *pourra les utiliser :*

— en confiant la résolution et la rédaction à un ou plusieurs groupes d'élèves ;

— pour compenser l'absence de matériel à l'occasion d'une séance de Travaux Pratiques ;

— pour étudier une expérience qui serait trop délicate pour des élèves de Terminale, ou trop longue à réaliser.

● *Ces problèmes-expérience peuvent développer chez* l'élève :

— l'esprit à la fois critique et inventif nécessaire pour juger de la valeur d'une expérience, et pour l'exploiter au maximum ;

— le jugement nécessaire pour apprécier l'importance relative des phénomènes, les ordres de grandeur des différentes variables, en un mot, le sens de l'approximation ;

— l'habitude de faire un travail écrit clair, propre, sans perte de temps excessive, puisque l'accent n'est pas mis ici sur les difficultés théoriques de recherche de la solution ;

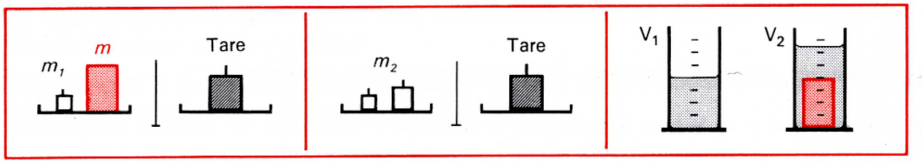
— l'aptitude au travail en équipe.

● **Problème-expérience n° 1** *(à faire après P 3).*

On se propose de déterminer la densité de l'aluminium par rapport à l'eau.

— 1re *méthode*

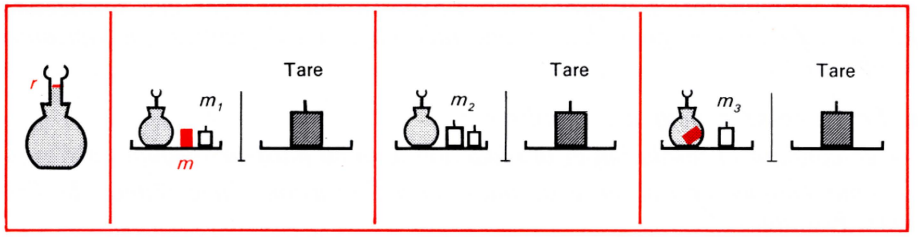
a) la masse m d'un cylindre d'aluminium est déterminée par double pesée. Chaque pesée se fait à 1 cg près. On a trouvé :
$m_1 = 1{,}10$ g $\quad m_2 = 10{,}00$ g. Evaluer m et l'incertitude Δm



b) Le volume V est déterminé en utilisant une éprouvette graduée, chaque division mesure 0,2 cm³. Une première lecture donne $V_1 = 5{,}0$ cm³ d'eau. On immerge le cylindre, une deuxième lecture donne $V_2 = 8{,}4$ cm³. Le niveau de l'eau est apprécié à une demi-division près. Evaluer V et l'incertitude ΔV.

c) Calculer la masse volumique μ de l'aluminium, puis sa densité d par rapport à l'eau. Déterminer Δd, la masse volumique de l'eau est $\mu_0 = 1$ g/cm³ (l'incertitude sur μ_0 est négligeable).

— 2e *méthode :* On utilise un flacon spécial (picnomètre) rempli d'eau. Le niveau d'eau est, à chaque pesée, amené devant le repère r. On réalise successivement les trois équilibres :



On a trouvé $m_1 = 2{,}00$ g $\quad m_2 = 10{,}91$ g $\quad m_3 = 5{,}30$ g. Les pesées sont faites à 1 cg près.
L'incertitude résultant de l'appréciation du niveau de l'eau devant r est négligeable.
Evaluer la masse m du cylindre, évaluer la masse m' du volume d'eau déplacé par le cylindre, en déduire la densité $d = \dfrac{m}{m'}$.

Evaluer l'incertitude Δd. On remarquera que les erreurs sur m et m' ne sont pas indépendantes, on fera un calcul d'erreurs puis on majorera. On démontrera ainsi que

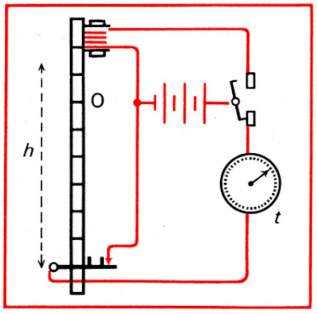
$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{2\Delta m}{m_3 - m_1}.$$

Conclusion. Les résultats donnés par chaque méthode sont-ils concordants ?

● **Problème-expérience n° 2** *(à faire après P 5)*

L'étude de la chute d'une bille, à l'aide d'un chronomètre électrique a donné les résultats suivants

h (cm) . . .	50	100	150	200
t (s)	0,31	0,44	0,54	0,63



On admettra les valeurs d'incertitude suivantes :

$\Delta h = 5$ mm $\qquad \Delta t = 5.10^{-3}$ s

❶ Expliquer, d'après le schéma, le fonctionnement du montage.

❷ Représenter $y = \sqrt{h}$ en fonction de t. (Echelle : 10 cm/0,5 s; 10 cm/1 m$^{\frac{1}{2}}$, utiliser du papier millimétré). On montrera que $\Delta y = \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta h}{\sqrt{h}}$, on calculera les quatre incertitudes Δy compte tenu des incertitudes chaque mesure n'est pas représentée par un point, mais par un rectangle. Montrer que la droite D passant au plus près des points coupe tous les rectangles d'incertitude.

❸ D coupe Ot, en M, à gauche de O. Soit $\mathcal{C}$ l'abscisse de M, en valeur absolue. Montrer que l'on peut expliquer ce fait en considérant que l'aiguille de l'horloge démarre $\mathcal{C}$ secondes après la bille. Comment s'explique ce retard ?

❹ L'hypothèse précédente étant admise, montrer que cette expérience détermine la nature du mouvement de chute de la bille. Quelle est-elle ? Evaluer l'accélération g du mouvement en utilisant la pente de D.

● **Problème-expérience n° 3** *(à faire après P 10)*.

On se propose de déterminer la raideur d'un ressort par deux méthodes.

❶ *Méthode statique.* Un plateau est suspendu au ressort. On y place des masses marquées, m. On repère le niveau du plateau, x, à 1 mm près. Voici les résultats :

m (g)	0	100	200	300	400
x (cm)	1,1	2,8	4,5	6,5	8,2

Représenter graphiquement le poids P de m en fonction de x. On marquera les segments d'incertitude. On néglige l'incertitude sur m et sur g. $g = 9{,}81$ m/s².

Echelles : 1 cm/10^{-2} m 2 cm/1N

Le ressort a-t-il travaillé dans son domaine d'élasticité ?

Déterminer sa raideur k, à l'aide du graphique. Evaluer Δk.

❷ *Méthode dynamique.* Une masse M est fixée à l'extrémité inférieure du ressort. Elle est écartée vers le bas de sa position d'équilibre puis abandonnée sans vitesse. On mesure la durée, t, de 10 oscillations, à 0,1 s près. On a trouvé :

M (g)	100	200	300	400
t (s)	2,8	3,9	4,7	5,4

Soit T, la période des oscillations. Représenter graphiquement T^2 en fonction de M. Marquer les segments d'incertitude. On montrera que $\Delta(T^2) = 2\,T.\Delta T$. L'incertitude sur M est négligeable.

Echelles : 2 cm/0,1 kg 2 cm/0,1 s²

Le résultat obtenu est-il en accord avec la relation entre T, M et k, qui est obtenue par l'étude théorique du mouvement ?

Déterminer k à l'aide du graphique, évaluer Δk. Les deux méthodes, statique, et dynamique donnent-elles des résultats concordants ?

Si l'on tient compte de la masse m du ressort, l'étude théorique du mouvement conduit au résultat suivant :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{k}\left(M + \frac{m}{3}\right)}$$

La masse du ressort utilisé est $m = 18$ g.

Les résultats numériques, représentés graphiquement, sont-ils en accord avec cette relation ?

● **Problème-expérience n° 4** *(à faire après P 16).*

On se propose d'étudier expérimentalement le mouvement d'un chariot de masse totale M = 200 g.

Il est lâché sans vitesse sur un plan incliné d'un angle α sur l'horizontale. La distance parcourue e est déterminée pratiquement sans incertitude. La durée du mouvement t à 0,1 s près.

❶ Le plan étant fixé, on fait parcourir par le chariot différentes distances e

e (m)	0	0,50	1,00	1,50	2,00
t (s)	0	1,1	1,5	1,9	2,2

Représenter e en fonction de t^2 sur papier millimétré.

Echelle : 10 cm/5 s² 5 cm/1 m.

On montrera que $\Delta(t^2) = 2\,t.\Delta t$ et on calculera les cinq $\Delta(t^2)$. Montrer que la droite passant au plus près des points coupe tous les segments d'incertitude. Que peut-on en déduire quant à la nature du mouvement? Evaluer d'après le graphe d'accélération du chariot.

❷ On donne au plan différentes inclinaisons, on détermine chaque fois le temps t mis par le chariot pour parcourir e = 2 m

α (degré) ..	5	10	15	20
t (s)	2,4	1,7	1,3	1,2

$\Delta\alpha = 1°$.

Représenter l'accélération γ en fonction de sin α sur papier millimétré.

Echelle : 2 cm/0,1 2 cm/1 m/s²

Montrer que $\Delta\gamma = 2\gamma\dfrac{\Delta t}{t}$ et calculer les quatre $\Delta\gamma$.

Pour évaluer $\Delta(\sin\alpha)$, ou l'on démontrera que $\Delta(\sin\alpha) = \cos\alpha\,\Delta\alpha$, ou l'on se servira des tables de rapports trigonométriques. Tracer les rectangles d'incertitude.
Montrer qu'il est possible de trouver une droite passant par l'origine coupant tous les rectangles d'incertitude en passant au plus près des points. Déterminer la pente de cette droite. Essayons de l'interpréter en envisageant successivement :

— 1re *hypothèse* : le chariot est en translation; montrer que dans ce cas la pente de la droite est égale à g. Est-ce vérifié?

— 2e *hypothèse*. Il faut tenir compte de la masse m de chaque roue. Chaque roue étant assimilable à un disque de rayon r, montrer que dans ce cas la pente de la droite est égale à

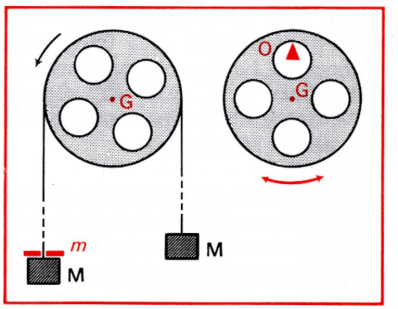
$\dfrac{g}{1+\dfrac{2m}{M}}$ (le chariot a quatre roues). Quelle valeur faudrait-il prendre pour m?

— 3e *hypothèse*. Montrer que, si l'on envisage le chariot soumis à une force de frottement f constante, la pente de la droite est indépendante de f, γ devient alors une fonction affine de sin α. Peut-on garder cette hypothèse d'après les résultats trouvés?

● **Problème-expérience n° 5** *(à faire après* P 22*)*.
Une machine d'Atwood comprend une poulie, deux masses M, égales, fixées aux extrémités d'un fil passant dans la gorge de la poulie. L'une des masses sera surchargée d'une masse m.

❶ Etude de la poulie. La poulie évidée a un moment d'inertie difficile à évaluer par le calcul. Aussi peut-on opérer de la façon suivante. La poulie (dégagée de son axe G) peut osciller librement autour d'un couteau horizontal O. La durée de 100 oscillations est 62 s. La distance du centre de gravité G de la poulie à l'arête du couteau est $a = 6{,}2$ cm. La masse de la poulie est $\mu = 61$ grammes. On prendra $g = 9{,}8$ m/s². Calculer le moment d'inertie J_O de la poulie par rapport à l'axe O, puis en déduire le momeut d'inertie de la poulie par rapport à G (on montrera que $J_G = J_O - \mu a^2$).

❷ Etude de la machine d'Atwood.
Les deux masses M ont pour mesure M = 185 g, la surcharge m égale 20 g.
On mesure les durées de chute avec une incertitude de 10^{-2} s, les hauteurs de chute à 10^{-2} m près.
On trouve, ainsi, les résultats suivants



h (en m)...	0	0,50	1,00	1,50	2,00
t (en s)...	0	1,585	2,255	2,750	3,165

Représenter la hauteur de chute h en fonction de t^2 sur papier millimétré (échelle : 10 cm/1 m; 20 cm/10 s²).
Montrer que $\Delta(t^2) = 2\ t.\Delta t$ et calculer les quatre $\Delta(t^2)$. Tracer les rectangles d'incertitude.
Montrer qu'il est possible de trouver une droite passant par l'origine coupant tous les rectangles d'incertitude en passant au plus près des points. Que peut-on en déduire quant à la nature du mouvement ? D'après la pente de cette droite en déduire que l'accélération est voisine de $\gamma = 0{,}4$ m/s²

❸ En appliquant le théorème de l'énergie cinétique montrer que

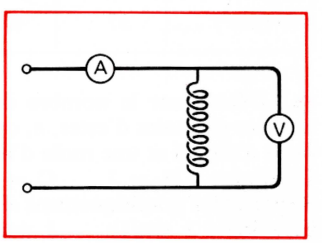
$$\gamma = \frac{mg - \frac{\mathcal{M}}{R}}{m + 2M + \frac{J_G}{R_2}}$$

R étant le rayon de la poulie (R = 7,1 cm)
$\mathcal{M}$ étant le moment du couple de frottements s'exerçant sur la poulie.

En déduire $\mathcal{M}$ en m.N

● **Problème-expérience n° 6** *(à faire après* P 43*)*.
On se propose de déterminer la résistance R et l'inductance L d'une bobine.

1re **méthode** :



a) la bobine est alimentée en courant continu. On lit sur l'ampèremètre A : 0,57 A à 0,01 A près; sur le voltmètre V : 6,8 V à 0,1 V près. L'intensité dérivée dans le voltmètre est négligeable. Déterminer R et l'incertitude de ΔR.

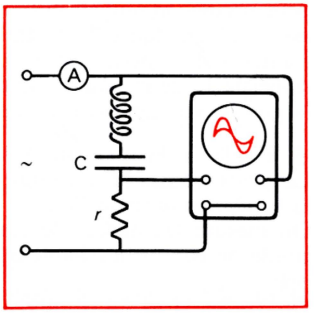
b) la bobine est alimentée en courant alternatif de fréquence 50 Hz. L'ampèremètre donne l'intensité efficace 0,92 A à 0,01 A près; le voltmètre donne la

tension efficace 21,7 V à 0,5 V près. Déterminer L et ΔL. L'incertitude sur la fréquence est négligeable.

Note : On montrera que $\Delta(Z^2 - R^2) = \Delta(Z^2) + \Delta(R^2) = 2\,Z.\Delta Z + 2\,R\Delta R$

et que $$\Delta L = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta(Z^2 - R^2)}{Z^2 - R^2}.$$

2e méthode. La bobine est montée en série avec une boîte de condensateurs de capacité : 10; 20; 20; 50; 100; en μF, et avec une résistance non inductive $r = 10\ \Omega$. Un oscillographe bi-courbes prend la tension aux bornes de r et aux bornes de l'ensemble. On règle C de telle sorte que les sinusoïdes sur l'écran soient en phase, dans ces conditions C = 160 μF, et l'ampèremètre indique 0,97 A à 0,01 A près, sa résistance est négligeable. La tension appliquée est 21,7 V à 0,5 V près. Déterminer R, L, ΔR, ΔL. On négligera l'incertitude sur r, on ne tiendra pas compte de l'approximation du réglage à la résonance.



— **3e méthode.** La bobine est alimentée en alternatif de fréquence 50 Hz. L'ampèremètre indique encore 0,92 A à 0,01 A près; le voltmètre 21,7 V à 0,5 V près. On a, en outre, connecté un wattmètre qui indique une puissance égale à 10 W à 1 W près. On néglige la puissance consommée dans les appareils de mesure. Déterminer R, L, ΔR, ΔL.

● **Conclusion** : Marquer sur un axe $\overrightarrow{R'R}$, les points représentant les trois résultats, R, ainsi que les segments d'incertitude. Les résultats sont-ils concordants? sont-ils de même qualité? Etudier de même les résultats relatifs à L sur un autre axe $\overrightarrow{L'L}$.
Echelle 1 cm/1 Ω et 1 cm/0,01 H.

● **Problème-expérience n° 7** *(à faire après* C 22*)*.

— *Estérification.*

On dispose de sept tubes de verre. On met dans chacun d'eux 4,6 g d'alcool éthylique, et 6 g d'acide acétique, purs. Après les avoir rapidement scellés, on place les tubes dans un autoclave à 130 °C. On retire un tube toutes les heures. On en refroidit le contenu. On ajoute de la phtaléine du phénol. Puis, à l'aide d'une burette graduée, on verse de la soude normale ($N_B = 1$) jusqu'à ce que l'indicateur vire au violet. On note le volume de soude versé, V cm³, à l'heure t.h.

Voici les résultats :

t (h)	1	2	3	4	5	6	7
V (cm³) ...	57	42	37	34	33,5	33	33

❶ Déterminer le nombre de moles d'ester formé à chaque instant t. En déduire le nombre de moles d'ester, n, qui aurait été obtenu si l'on avait mis dans chaque tube une mole d'alcool et une mole d'acide.
On donne : H = 1 C = 12 O = 16
Représenter graphiquement n en fonction de t.
Echelles : 1 cm/1h 1 cm/0,1 mole

❷ Déterminer, à l'aide de la courbe, la vitesse apparente d'estérification, v, aux instants suivants :

t (h)	0	3	7
v (mole/h)			

Représenter graphiquement v en fonction de t.

Echelles : 1 cm/1 h 1 cm/0,1 mole/h

Conclure.

● **Problème-expérience n° 8** *(à faire après C 27)*

A) Dans 10 cm³ d'acide chlorhydrique, on verse progressivement de la soude N/10, soit n cm³, en notant, à l'aide d'un pH-mètre, le pH du mélange. On a trouvé :

n (cm³) ...	0	1	10	11,8	12	12,2	14,4
pH	0,9	1	2	3	7	11	12

❶ Tracer la courbe de neutralisation, donnant le pH en fonction de n.

❷ Déterminer au vu de la courbe la normalité de l'acide chlorhydrique.

❸ Si l'on veut faire un dosage à 1 % près, quels indicateurs colorés peuvent être utilisés, à la place du pH-mètre ? (Voir les domaines de virage dans le tableau de Chimie, page 158.)

B) Dans 10 cm³ d'acide acétique, on verse progressivement de la soude N/10, soit n cm³ en notant, à l'aide d'un pH-mètre, le pH du mélange. On a trouvé :

n (cm³)	0	0,2	2,3	9,6	14,2	14,9	15	15,1	16,2
p H	2,8	3	4	5	6	7	8,8	11	12

❶ Tracer la courbe de neutralisation, donnant le pH en fonction de n.

❷ Déterminer, au vu de la courbe, la normalité de l'acide acétique utilisé.

❸ Si l'on veut faire un dosage à 1 % près, quels indicateurs colorés peuvent être utilisés, à la place du pH-mètre ? (Voir les domaines de virage dans le tableau de Chimie page 158.)

Sujets d'exposés

La liste des sujets d'exposés, qui est proposée ici, n'est nullement exhaustive. Les affinités particulières à chaque élève, les documents (journaux, revues, livres, diapositives, films) dont il peut disposer, conditionnent largement le choix d'un sujet.

A) Physique

1. Ordre de grandeur des accélérations : voiture au démarrage, au freinage, au cours d'un choc; fusée; bateaux; coureur à pied; cycliste; balle dans un fusil; électron dans un tube.

2. Le double-bang. Théorie (voir p. 33). Les problèmes pratiques qu'il pose.

3. Chute libre sur la Lune. Valeur de γ. Problèmes que cela pose pour les astronautes.

4. Etude des frottements solide-solide. Rôle du pneu de voiture dans les freinages et accélérations.

5. Etude d'un tremplin de ski. Coupe. Données numériques (pente, dénivellation). Faire une étude approchée du problème. Donner les records sportifs.

6. Entraînement des cosmonautes dans les centrifugeuses. Quelles accélérations supportent-ils? Pendant quelles durées? Quels sont les effets physiologiques?

7. Etude de l'attraction dite « le mur de la mort ». Faire une théorie simplifiée avec des données numériques approchées.

8. Le comportement des voitures dans une courbe. Voitures survireuses, sous-vireuses.

9. Suspension des voitures par barre de torsion, par ressorts, par un fluide sous pression.

10. Etude des accidents de voiture : « absorption » de l'énergie cinétique. Zones de déformation, avant, arrière. Forces d'inerties au cours du choc.

11. Gyrobus. Démarrage à inertie.

12. Le moteur à réaction.

13. La rotation de la Terre. Ses conséquences. Ses irrégularités.

14. Un vol Apollo. Etude de la fusée. L'apesanteur.

15. Le billard. Etude des chocs.

16. Le pendule de Foucault.

17. Fonctionnement d'une horloge et d'une montre.

18. Mesures précises de g.

19. Rôle de la résistance de l'air en aviation. Portance. Trainée. Forme aérodynamique. Géométrie variable.

20. Barrages hydro-électriques en France. Leur position géographique. Leurs caractéristiques. L'avenir de la houille blanche.

21. Les rendements des divers moteurs.

22. Le moteur rotatif.

23. L'échauffement des freins d'une voiture. Fading. Les solutions techniques de refroidissement.

24. Propagation des ébranlements dans la Terre. Séismographes.

25. Insonorisation : les divers procédés. « Nuisance » du bruit. La mesure du bruit.

26. Etude de quelques résonances en mécanique (Pont de Tancarville, navire).

27. Les applications de l'infrarouge.

28. Les applications des polaroïds (lunette, pare-brise).

29. Les lasers.

30. La caméra de télévision.

31. Etude de quelques propriétés de la triode.

32. Les redresseurs (oxyde de cuivre, silicium), chargeur de batterie.

33. La bombe A; la bombe H.

34. Les piles atomiques.

35. Les accélérateurs de particules.

36. Les émetteurs, radio, télévision. Leur portée, leur puissance, longueur d'onde. L'encombrement du domaine hertzien.

37. Le calcul analogique : système mécanique (masse suspendue à un ressort) représenté par un circuit électrique (circuit RLC).

B) Chimie

1. Détection des particules : chambre à bulles, chambre à brouillard.

2. Pierrelatte. Séparation de U 235.

3. La datation par les isotopes radioactifs.

4. La pollution chimique, nucléaire.

5. Polymérisation et copolymérisation dans l'industrie chimique (nylon, caoutchouc).

6. Savons. Détergents.

7. L'importance du pH en biologie (milieu tampon).

8. La corrosion.

9. Les piles à combustibles.

Table des matières

	▶ **Utilisation de l'ouvrage**	3
Pb 1	Calcul de petites variations	5
Pb 2	Calcul d'incertitude	7
Pb 3	Calculs approchés	9
Pb 4	Cinématique des mouvements rectilignes	11
Pb 5	Chute libre	17
Pb 6	Cinématique des mouvements curvilignes	25
	▶ **Contrôles.** Pb 1 à Pb 6	31
Pb 7	Principe fondamental de la dynamique	35
Pb 8	Théorème du centre de gravité	37
Pb 9	Tension	43
	▶ **Contrôles.** Pb 7 à Pb 9	47
Pb 10	Dynamique du mouvement rectiligne sinusoïdal	51
Pb 11	Force d'inertie	57
Pb 12	Dynamique du mouvement circulaire uniforme	59
	▶ **Contrôles.** Pb 10 à Pb 12	65
Pb 13	Théorème fondamental de la dynamique de rotation	71
Pb 14	Mouvement de rotation sinusoïdale	77
	▶ **Contrôles.** Pb 13-Pb 14	79
Pb 16	Travail. Energie cinétique	81
	▶ **Contrôles.** Pb 15-Pb 16	87
Pb 17	Quantité de mouvement	91
Pb 18	Moment cinétique	95
Pb 19	Résistance de l'air	
Pb 20	Systèmes d'unité	97
Pb 21	Pendule pesant	
Pb 22	(composé ou simple)	99
	▶ **Contrôles.** Pb 17 à Pb 22	109
Pb 23	Energie potentielle.	
Pb 24	Energie mécanique	117
Pb 25	Principe de l'état initial et final	123
Pb 26	Théorème de Carnot	125
	▶ **Contrôles.** Pb 23 à Pb 26	127
Pb 27	Etude d'un mouvement	
Pb 28	vibratoire	131

Pb 29 Propagations
Pb 30 (ébranlements, vibrations) 135
Pb 31 Vitesse du son 141

▶ **Contrôles.** Pb 27 à Pb 31 143

Pb 32 Superpositions des vibrations.
Pb 33 Battements. Interférences mécaniques 147
Pb 34 Ondes stationnaires.
Pb 35 Résonance 161

▶ **Contrôles.** Pb 32 à Pb 35 169

Pb 36 Interférences lumineuses 175
Pb 38

▶ **Contrôles.** Pb 36 à Pb 38 183

Pb 39 Courants alternatifs 187
Pb 43

▶ **Contrôles.** Pb 39 à Pb 43 197

Pb 44 Les courants de haute fréquence 203
Pb 45 Les ondes électromagnétiques 209
Pb 46 Electronique 211
Pb 48

▶ **Contrôles.** Pb 44 à Pb 48 219

Pb 49 Effet photo-électrique 223
Pb 50 Rayons X 225
Pb 51 Masse et énergie.
Pb 52 Radioactivité 227

▶ **Contrôles.** Pb 49 à Pb 52 229

▶ **Contrôles** portant sur l'ensemble du programme 233

▶ **Problèmes-Expérience** 245

▶ **Sujets d'exposés** 253

Aubin Imprimeur
LIGUGÉ. POITIERS

Achevé d'imprimer en septembre 1986
N° d'édition 53 / N° d'impression P 14305
Dépôt légal : septembre 1986. — Imprimé en France

A LA MÊME LIBRAIRIE

R. BOURDON et C. BOURQUARD

- CHIMIE terminales c-d-e

la question de cours au baccalauréat

- PHYSIQUE terminales c-d-e

la question de cours au baccalauréat

- Problèmes de Physique

terminales c-d-e

ISBN 2-206-00053-9